

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Estudio de la dinámica de los autómatas cíclicos en grillas.

EDUARDO ENRIQUE MORENO ARAYA

Comisión Examinadora	Nota(nº)	CALIFICACIONES (Letras)	Firma
Profesor Guía Sr. Martín Matamala	_____	_____	_____
Profesor Integrante Sr. Marcos Kiwi	_____	_____	_____
Profesor Integrante Sr. Alejandro Maass	_____	_____	_____
Nota Final Examen de Título	_____	_____	_____

**MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO**

SANTIAGO DE CHILE
ABRIL 2001

RESUMEN DEL INFORME FINAL
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR: EDUARDO MORENO ARAYA
PROF. GUÍA: SR. MARTÍN MATAMALA

Estudio de la dinámica de los autómatas cíclicos en grillas

El objetivo del presente trabajo es demostrar que la dinámica de los autómatas cíclicos en la grilla \mathbb{Z}^2 sobre configuraciones con soporte finito, tiene periodos cuyo largo crece como una función superpolinomial del tamaño del soporte. Si bien este resultado es conocido para grafos particulares, la mayor parte de las aplicaciones de este modelo es en la grilla \mathbb{Z}^2 .

Informalmente si es posible ver, en la evolución de la dinámica, k partes de la grilla independientes con periodos que sean primos relativos, entonces la evolución global tendrá un periodo que es el producto de aquellos de las partes. En este trabajo las partes son ciclos construidos con un periodo dado a priori.

La dificultad es demostrar la independencia dinámica de estos ciclos. En este trabajo esto se resolvió construyendo configuraciones cuyos soportes son grillas finitas y se estudió cómo incrustarlo en \mathbb{Z}^2 de forma que se obtenga esta independencia y se genere un periodo no polinomial con respecto al tamaño del soporte de la configuración. Adicionalmente, se demostró que existe al menos un vértice de \mathbb{Z}^2 cuyo periodo es el del sistema.

Para ello fue necesario entender la relación entre el número de estados del sistema y el subgrafo de influencias de la dinámica, obteniéndose relaciones entre el periodo del sistema y el número de estados del mismo. Así mismo, fue también necesario estudiar la relación entre el subgrafo de influencias y las asignaciones de estados a los vértices para obtener periodos determinados, obteniéndose una familia de asignaciones que nos permitió construir los ciclos de periodos predeterminados.

Como apoyo a las investigaciones anteriores se programó un software de acceso público para simular y estudiar la dinámica de los autómatas cíclicos sobre \mathbb{Z}^2 .

AGRADECIMIENTOS

Han sido numerosas personas las que me han acompañado y apoyado en este largo camino para llegar a ser ingeniero, y habrá muchas otras que me acompañarán en el resto de la vida. A todas estas personas les dedico esta memoria.

En primer lugar gracias a Anneli, mi esposa, por su comprensión y ayuda; a mis padres y hermanos sin cuyo incondicional apoyo no podría haber llegado hasta acá; y a mi nueva familia (los Gramusset-Hepp) por su entusiasta compañía a lo largo de estos últimos años.

También debo agradecer a Martín Matamala, que tal como dice la portada de esta memoria, ha sido un gran profesor y un gran guía en este último tiempo. Fue él quien, siendo yo un alumno de tercer año, me acercó a la investigación científica, para no alejarme de ella nunca más.

Muchas gracias a los académicos y funcionarios del Departamento de Ingeniería Matemática por el apoyo y compañía en estos seis años, especialmente a Alejandro Maass y Marcos Kiwi por sus innumerables enseñanzas tanto académicas como profesionales.

Y por supuesto, gracias a mis amigos y compañeros de estudio, especialmente a Javiera, Pedro, Vicente y Matías por todos estos años de compañía y apoyo incondicional tanto en las penas como en las alegrías.

*”Gracias a la vida
que me ha dado tanto
me dio dos luceros
que cuando los abro
perfecto distingo
lo negro del blanco
y en el alto cielo
su fondo estrellado
y en las multitudes
la mujer que yo amo”*

Violeta Parra

ÍNDICE GENERAL

1. Contexto	1
1.1. Introducción	1
1.2. Trabajo realizado	7
1.3. Explicación del modelo	11
2. Dinámica en esqueleto completo	14
2.1. Definiciones y resultados previos	15
2.2. Número de estados v/s eficiencia	20
3. Secuencias utilizadas	28
4. Configuraciones candidatas	35
4.1. Interacción entre configuraciones	36
4.1.1. Evolución del plano con dos configuraciones	37
4.2. Ciclos de período dado	40
4.3. Construcción de ciclos en un rectángulo	47
4.3.1. Construcción inicial (<i>Caso $k=1$</i>)	47

4.3.2. Ampliación de la construcción inicial	50
4.3.3. Completación a un rectángulo	55
5. Conclusiones	59
A. Software	61
A.1. Simulación	61
A.1.1. Obtención, ejecución e instalación	61
A.1.2. Uso del software	62
A.1.3. Estructura del programa fuente	63

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1.	Ejemplo de la evolución del CAN, en este caso con $q = 3$	2
1.2.	Ejemplo y evolución de una red de autómatas con período 4. . .	3
1.3.	Ejemplo del esqueleto de un autómata ($q = 4$) y su evolución. . .	4
1.4.	CAN que alcanza la cota $T(x) = e^{\Omega(\sqrt{ V })}$ (Ver [MG97]).	6
1.5.	Aristas y vecinos del nodo (i, j) en el grafo \mathbb{Z}^2	6
1.6.	Ejemplo de la evolución de un CAN sobre \mathbb{Z}^2	7
1.7.	Ejemplo de la descomposición de un ciclo en baldosas.	8
1.8.	Ejemplo de la separación del plano producto de dos ciclos de eficiencia máxima.	9
1.9.	Ejemplo de camino, ciclo y ciclo simple.	12
1.10.	Ejemplo de ciclos, sus saltos y eficiencias.	13
2.1.	Ejemplo de dos ciclos unibles.	16
2.2.	Ejemplo de la dirección utilizada en la unión de ciclos.	17
2.3.	Ejemplo del interior discreto de una curva.	19
2.4.	Casos posible en la demostración del Lema 2.5.	19

2.5. Casos posibles en la demostración del Teorema 2.10.	22
4.1. Esquema de la separación del plano en dos partes.	36
4.2. Ejemplo de la separación del plano producto de dos ciclos de eficiencia máxima. (Figura 1.8)	39
4.3. Primera completación para un ciclo rectangular.	41
4.4. Solución a la primera completación de un ciclo rectangular. . .	42
4.5. Segunda completación para un ciclo rectangular.	43
4.6. Protección definitiva para completar un ciclo rectangular. . . .	44
4.7. Forma final del ciclo construido.	45
4.8. Forma final del ciclo construido (experimental).	46
4.9. Ciclo inicial ($k = 1$).	47
4.10. Ampliación del ciclo $k - 1$ a k	51
4.11. Ejemplo de la numeración usada.	51
4.12. Ejemplo de completación a un rectángulo.	55
4.13. Ejemplo de completación a un rectángulo (experimental). . . .	56
4.14. Ejemplo de configuración con período $T(x) = e^{\Omega(\sqrt{ V })}$	57
4.15. Ejemplo de configuración con período $T(x) = e^{\Omega(\sqrt{ V })}$ iterada. .	58

CAPÍTULO 1

CONTEXTO

1.1 INTRODUCCIÓN

La presente memoria se inscribe en el ámbito de las matemáticas discretas, específicamente en el área de los autómatas celulares. En este trabajo se estudiará la dinámica de redes de autómatas cíclicos (CAN) en el plano \mathbb{Z}^2 .

Básicamente, una red de autómatas cíclicos consiste en un grafo $G = (V, E)$ que en cada nodo tiene un autómata finito. Cada autómata tiene, inicialmente, un valor o “estado” perteneciente a un conjunto $Q = \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$ que en lo que sigue llamaremos estado del nodo. La evolución o dinámica de los estados de la red ocurre en instantes de tiempo discretos. En cada etapa el estado de todos los nodos es actualizado de acuerdo a la regla siguiente: si un nodo u con estado q_u tiene un vecino v (es decir, un nodo conectado a través de una arista con él) que tiene estado igual a $q_u + 1 \pmod q$, entonces en la siguiente etapa el nodo u tendrá estado $q_u + 1 \pmod q$. Si esto no sucede, el nodo mantendrá su estado.

En el ejemplo de la Figura 1.1 (en este caso, $q = 3$) el nodo de más arriba tiene estado 1 y su vecino de la izquierda tiene estado 2, luego en la siguiente etapa el nodo superior tendrá estado 2; el nodo de más a la izquierda también cambia pues éste, inicialmente, tiene estado 2 y su vecino de abajo tiene estado 0, por lo que en la siguiente etapa tendrá también estado 0. Esto

1.1. INTRODUCCIÓN

mismo no sucede con el nodo de más abajo pues, inicialmente, posee estado 1 y sus vecinos sólo tienen estado 0 ó 1 por lo que en la siguiente etapa su estado no cambiará.

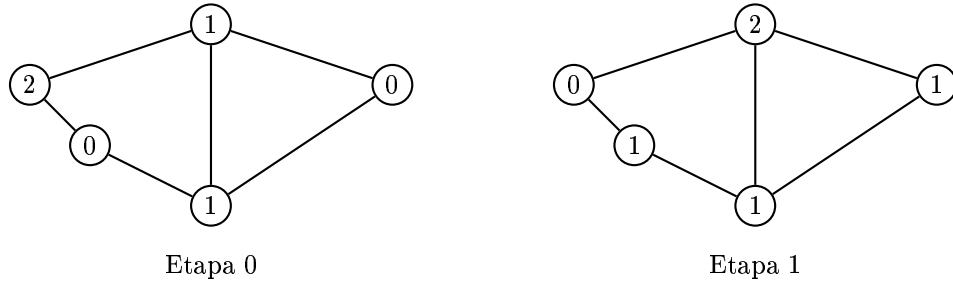


Figura 1.1: Ejemplo de la evolución del CAN, en este caso con $q = 3$.

Las redes de autómatas cíclicos pertenecen a los modelos de procesos de “reacción-difusión” sobre medios excitables (por ejemplo, un nervio). El primero de estos modelos fue introducido en [GHH78, GH78, GGH80] y se llama “autómata Greenberg-Hasting”. En este autómata un nodo con estado $k \neq 0$ cambia en la siguiente etapa, automáticamente, al estado $(k + 1) \bmod q$, y si su estado es $k = 0$, entonces cambia al estado 1 sólo si existe algún vecino que posee este estado. Lo que este autómata permite modelar es el hecho que una región excitada “difunde” su excitación a la región adyacente que está en reposo, pero no a las regiones refractarias. De la misma forma una región en etapa refractaria sólo interactúa con las regiones adyacentes cuando alcanza un estado de reposo. Así cada nodo pasa de una etapa de “excitación” (estado $k = 1$) a una de “difusión” (estado $k = 2, \dots, q - 1$) y luego a una etapa de “reposo” (estado 0).

Para el autómata Greenberg-Hasting se estudió en [AR84] la formación de patrones y de estructuras periódicas para el plano. Se muestra que un soporte inicial acotado engendra una estructura tal que, después de un régimen transitorio, cada “ventana” del plano presenta un comportamiento periódico. Además, desde el punto de vista espacial, se generan “frentes de ondas” paralelos y equidistantes.

En [BG89] se analiza el autómata cíclico como un proceso de Markov a tiempo continuo con evolución estocástica, esto es, la diferencia de tiempo entre las etapas sucesivas de la dinámica es una variable aleatoria de distribu-

1.1. INTRODUCCIÓN

ción exponencial. El trabajo considera grafos unidimensionales y bidimensionales, entregándole inicialmente a cada nodo un color elegido aleatoriamente con probabilidad uniforme ($\frac{1}{q}$) entre los q colores distintos, y luego se analiza si el autómata se estabiliza en una configuración con un sólo color. En una dimensión sus resultados fueron que con probabilidad igual a 1, para $q \geq 5$, el autómata converge a una configuración monocromática y para $q \leq 4$ el sistema fluctúa, es decir, con probabilidad igual a 1 el sistema no llegará a una configuración fija. Para $q = 2$ este proceso es igual al modelo de los votantes estudiado en [CS73] y [HL75], esto es, dos poblaciones (blanco y negro) situadas sobre la recta que luchan por su territorio, por lo que si hay dos celdas vecinas de colores distintos, una de las dos celdas cambiará el color de su vecino en la siguiente etapa. El caso bidimensional se estudia en [Fis90] donde se demuestra que el autómata fluctúa con probabilidad igual a 1 para cualquier número de estados. Trabajos posteriores sobre este modelo se encuentran en [FGG91, Fis92, Fis91].

La noción más estudiada en los trabajos citados anteriormente es la de período, es decir, el número de etapas que demora el sistema, una vez estabilizado, para repetir sus estados.

En la Figura 1.2 se muestran cinco configuraciones consecutivas de un grafo circular con cuatro nodos. Se aprecia que en cada etapa el estado va “rotando” en el grafo, de modo que después de cuatro etapas el sistema repite su configuración. Dicho de otra forma el “período” de este autómata, en particular, es $T(\vec{x}) = 4$, pues cada 4 etapas todos los nodos tienen el mismo estado.

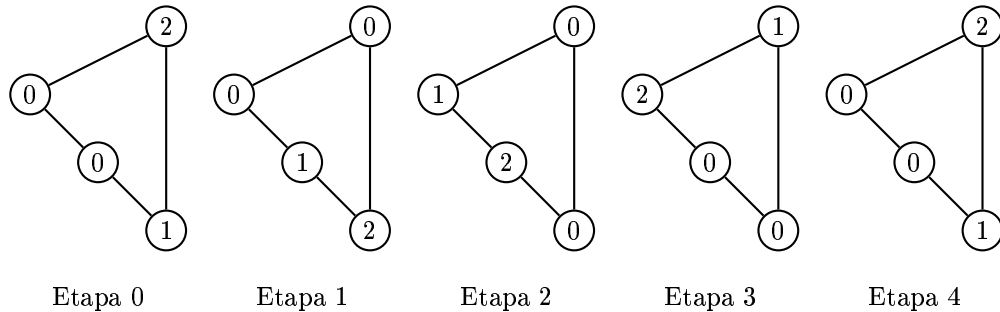


Figura 1.2: Ejemplo y evolución de una red de autómatas con período 4.

1.1. INTRODUCCIÓN

En [MG97] se realizó un completo estudio de la dinámica de las redes de autómatas cíclicos, obteniéndose cotas superiores para el largo de los períodos y una familia de redes que poseen periodos de largo $e^{\Omega(\sqrt{|V|})}$. Los elementos, herramientas y propiedades utilizados para ello son los siguientes:

- El esqueleto: el “esqueleto” de la red de autómatas asociado a una configuración de la red, consiste en el subgrafo del grafo original G que contiene los mismos nodos que G y a la arista (u, v) si y sólo si los estados de los nodos u y v son contiguos en el conjunto de estados, es decir, si $|q_u - q_v| \bmod q \in \{0, 1\}$. La Figura 1.3 muestra un autómata con $q = 4$ en el cual las aristas que están en el esqueleto están marcadas con una línea gruesa.

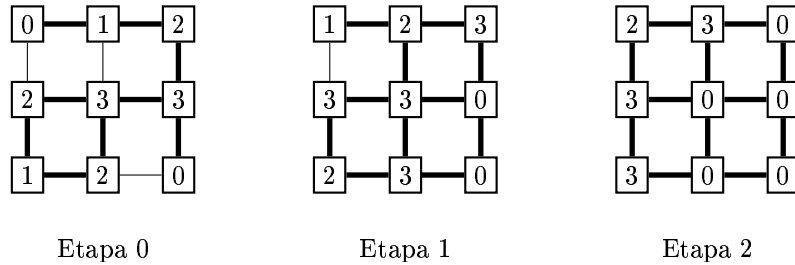


Figura 1.3: Ejemplo del esqueleto de un autómata ($q = 4$) y su evolución.

- El esqueleto es no decreciente: si una arista está en el esqueleto en un cierto instante de tiempo, entonces estará en él en los instantes posteriores. (Ver Figura 1.3)
- Existe un esqueleto estable: cuando las aristas que no están en el esqueleto son una cantidad finita, la propiedad anterior asegura que el esqueleto se estabilizará en algún momento, es decir, no se modificará en ninguna etapa futura. A este esqueleto lo referiremos como “esqueleto estable”.
- Las estructuras de interés en el esqueleto estable son los ciclos: un ciclo es una secuencia de nodos vecinos en el esqueleto estable donde el nodo de partida y el de llegada son los mismos, sin repetir dos veces un mismo nodo.

1.1. INTRODUCCIÓN

- El salto y la eficiencia de un ciclo: con respecto a la dinámica del sistema asociada a una configuración inicial, un ciclo tiene dos propiedades importantes, su “salto” y su “eficiencia”. Dado un ciclo sobre el esqueleto asociado a una configuración de la red y una dirección (por ejemplo, contra el sentido de los punteros del reloj), el salto del ciclo (para la configuración dada) es el valor de sumar sobre todos los nodos, las diferencias entre el estado del nodo y el de su nodo siguiente en la dirección escogida, donde esta diferencia también la entendemos módulo q (es decir, si u tiene estado $q - 1$ y v tiene estado 0 entonces la diferencia es $+1$). En el ejemplo de la Figura 1.2, el salto de este ciclo es igual a 3 en el sentido contrario a los punteros del reloj. En el ejemplo de la Figura 1.3, en la etapa 0, el único ciclo en el esqueleto tiene salto igual a 0.

La “eficiencia” de un ciclo en una configuración de la red será simplemente la división de su salto con su largo. Así, en el ejemplo de la Figura 1.2 el ciclo tiene eficiencia $\frac{3}{4}$ y en el ejemplo de la Figura 1.3 todos los ciclos tienen eficiencia 0. La eficiencia del autómata es el máximo de las eficiencias de todos los ciclos que hay en el esqueleto estable. Por esto, un ciclo que tenga eficiencia igual a la eficiencia del autómata, se llamará “ciclo de eficiencia máxima”.

- Los ciclos importantes son los de eficiencia máxima: una vez estabilizado el esqueleto, los ciclos de eficiencia máxima controlan completamente la dinámica del sistema, más específicamente, para cualquier nodo del plano el estado que tendrá en etapas futuras está determinado por la secuencia de estados que tengan los nodos del ciclo de eficiencia máxima más cercano a él.
- El valor del período del autómata divide al mínimo común múltiplo de los largos de los ciclos de eficiencia máxima sobre el esqueleto estable.
- Se entrega una construcción que logra alcanzar la cota superior antes citada: esta construcción se puede ver en la Figura 1.4.

El grafo de la red está compuesto por n ciclos unidos a un nodo central (con estado inicial 2), donde el ciclo i es de largo $4i$ y tiene asociado la secuencia de estados $0012(0112)^{i-1}$. Todos los ciclos son de eficiencia máxima igual a $\frac{3}{4}$. En las etapas futuras, cada ciclo evoluciona en forma independiente, por lo que la secuencia de estados que tendrá el nodo

1.1. INTRODUCCIÓN

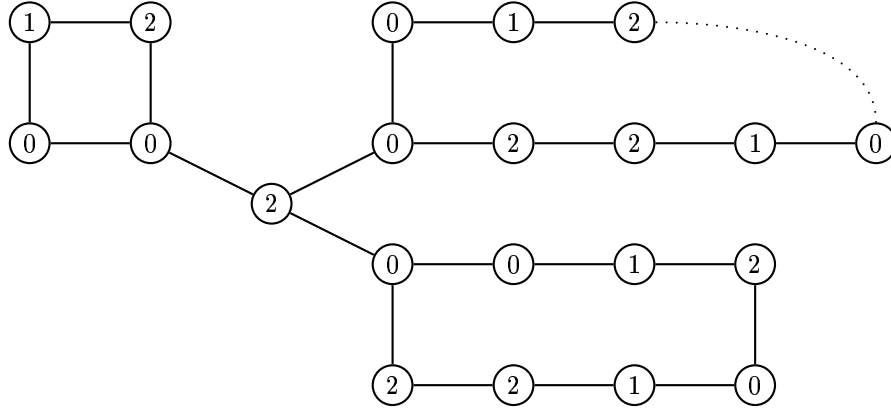


Figura 1.4: CAN que alcanza la cota $T(x) = e^{\Omega(\sqrt{|V|})}$ (Ver [MG97]).

central será $0012(0112)^u$ donde $u = \text{mcm}\{4i : i = 1 \dots m\}$. Entonces se obtiene una cota inferior no polinomial para el período del autómata cíclico.

Como fue dicho al comienzo, el interés de esta memoria es estudiar el modelo CAN en el grafo \mathbb{Z}^2 . Éste tiene como nodos los puntos $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ y los vecinos y aristas de este nodo son los que se muestran en la Figura 1.5, conocida como vecindad de Von Neumann.

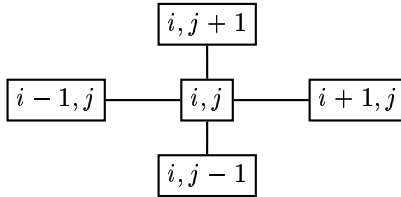


Figura 1.5: Aristas y vecinos del nodo (i, j) en el grafo \mathbb{Z}^2 .

La principal pregunta que se desea responder es: ¿Existen períodos no polinomiales para $G = \mathbb{Z}^2$? De lo antes visto, se deduce que para que esto ocurra deben existir configuraciones cuyo esqueleto sea estable, que posean ciclos de eficiencia máxima y de modo que el mínimo común múltiplo de sus largos crezca de modo no polinomial.

1.2. TRABAJO REALIZADO

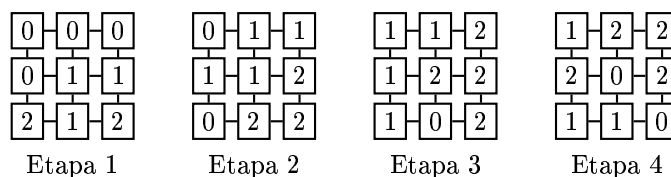


Figura 1.6: Ejemplo de la evolución de un CAN sobre \mathbb{Z}^2 .

Es por esto que para desarrollar este trabajo, en primer lugar, obtendremos información de cuales son las condiciones bajo las que una configuración posee esqueleto estable. Como segundo punto, estudiaremos la existencia de configuraciones con esqueleto estable que posean una eficiencia dada. Finalmente, analizaremos, qué tipo de configuración admite tener una gran cantidad de ciclos de eficiencia máxima y cómo éstos influyen en la dinámica del plano.

1.2 TRABAJO REALIZADO

Capítulo 2

Si las construcciones se pudieran realizar asumiendo que el esqueleto es \mathbb{Z}^2 se tendría una manera más simple de enfrentar el problema, pues el esqueleto se sabría estable.

El capítulo 2 está dedicado a estudiar el comportamiento de la dinámica cuando el esqueleto es todo \mathbb{Z}^2 , y en él se obtienen dos resultados. Primero, para $q \geq 4$ se demuestra que la dinámica del sistema es trivial, desde el punto de vista de las eficiencias posibles: configuraciones monocromáticas, es decir, de periodo 0 ($q > 4$) o ciclos de período 4 ($q = 4$). En segundo lugar, para $q = 3$ se demuestra que es posible obtener configuraciones con cualquier eficiencia $e \in [\frac{3}{4}, 1]$.

El primer resultado se demostrará con un argumento de descomposición “algebraica” de configuraciones, en esta descomposición el salto de los ciclos

1.2. TRABAJO REALIZADO

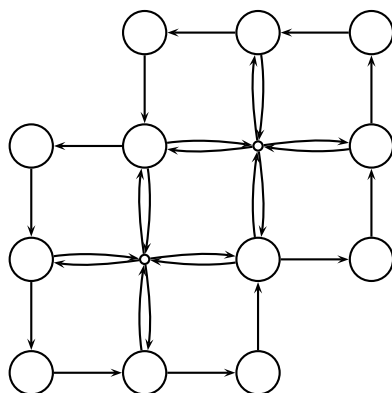


Figura 1.7: Ejemplo de la descomposición de un ciclo en baldosas.

es aditivo y por ende será posible reducirse a estudiar saltos de configuraciones muy simples que llamaremos *baldosas* (Ver Figura 1.7).

La demostración del segundo resultado será constructiva: para cualquier racional $e \in [\frac{3}{4}, 1]$ se mostrará una configuración que posee un ciclo rectangular con eficiencia e y se demostrará que este ciclo es de eficiencia máxima.

Capítulo 3

Por lo anterior, si se desea una mayor riqueza de comportamiento se deben considerar esqueletos estables que no son \mathbb{Z}^2 . En general, no se sabe predecir cual será el esqueleto estable asociado a una configuración inicial. La dificultad viene del hecho que durante un cierto número de etapas el esqueleto puede permanecer constante y posteriormente modificarse.

La mayor dificultad viene de la existencia de ciclos con nodos interiores. Por esta razón, el análisis se ha concentrado en la existencia de esqueletos estables cuyos ciclos no tengan nodos al interior.

En este capítulo, se obtienen, en primer lugar, condiciones necesarias sobre las configuraciones iniciales para la existencia de tales esqueletos y en segundo lugar se demuestra la existencia de una familia de configuraciones iniciales con la propiedad deseada.

1.2. TRABAJO REALIZADO

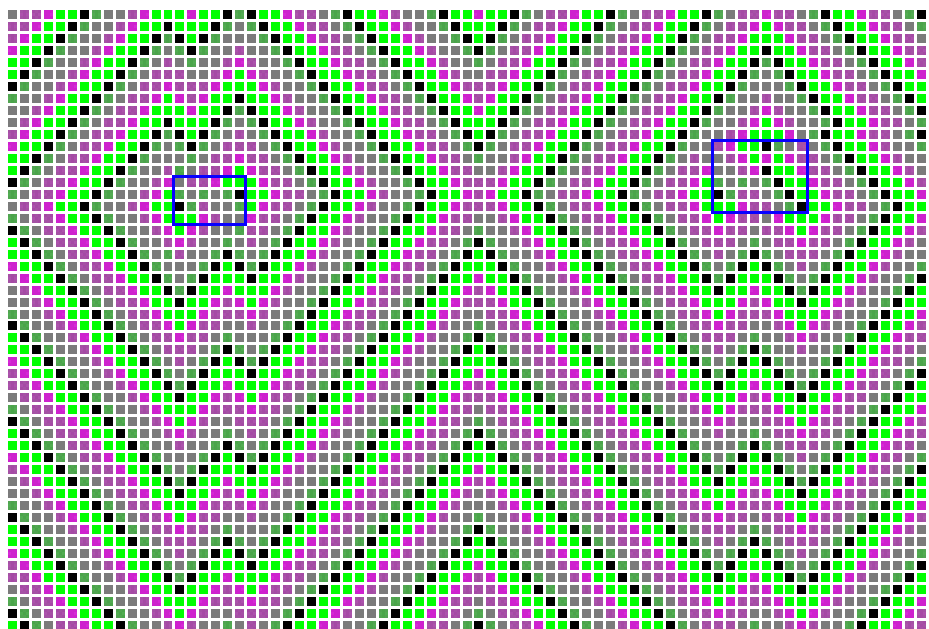


Figura 1.8: Ejemplo de la separación del plano producto de dos ciclos de eficiencia máxima.

Capítulo 4

En este capítulo se prueba que existen periodos de largo $e^{\Omega(\sqrt{n})}$ en una CAN donde n es el número de nodos no quietos, respondiendo afirmativamente a la pregunta que originó esta memoria.

Para lograr esto, se prueba que existe una configuración \bar{C} con n nodos no quietos cuyo esqueleto es estable, posee un conjunto de ciclos de máxima eficiencia y donde el mínimo común múltiplo de los largos es $e^{\Omega(\sqrt{n})}$. Además, existe un nodo que “equidista” de todos los ciclos con lo que su período es $e^{\Omega(\sqrt{n})}$.

La construcción de \bar{C} se hace mediante el diseño de los ciclos que aparecen en \bar{C} en grillas finitas y luego probando que tales estructuras finitas se pueden incrustar en \mathbb{Z}^2 , de manera de obtener las propiedades deseadas para \bar{C} .

1.2. TRABAJO REALIZADO

Apéndice

En el apéndice, se incluye la explicación de un software que se programó para simular el autómata sobre una región cuadrangular. Este software fue utilizado en un principio para entender el comportamiento del autómata y de sus ciclos, con lo cual se fueron desarrollando las construcciones del cuarto capítulo, y también permitió verificar experimentalmente los resultados obtenidos.

En este software, al igual que en otros trabajos sobre este mismo autómata, cada estado se representa por un color, obteniendo así un material visual que ayuda a entender la dinámica del autómata fácilmente. Por ejemplo, la Figura 1.8 muestra una pantalla del software utilizado.

1.3. EXPLICACIÓN DEL MODELO

1.3 EXPLICACIÓN DEL MODELO

En esta sección se presentan las definiciones que se utilizarán durante esta memoria en una forma más detallada. Lo primero que se define es una red de autómatas cíclicos.

Una **red de autómatas cíclicos** (CAN) es un sistema dinámico discreto, cuyo espacio es un grafo $G = (V, E)$, donde V es el conjunto de nodos y E es el conjunto de aristas y donde cada nodo tiene asociado un autómata finito con conjunto de estados $Q = \{0, 1, \dots, q-1\}$. La regla de evolución es la siguiente: supongamos que el autómata i tiene el estado k , entonces éste avanzará al estado $(k+1) \bmod q$ en la siguiente iteración si y sólo si al menos uno de sus vecinos está actualmente en estado $(k+1) \bmod q$. Escrito de otra forma la dinámica ocurre sobre $Q^V = \{\vec{x} : V \rightarrow Q\}$ y la función de transición $F : Q^V \rightarrow Q^V$ está dada por

$$F_i(x) = \begin{cases} s(x_i) & \text{si } \exists j \in V_i \text{ tal que } x_j = s(x_i) \\ x_i & \text{si no} \end{cases}$$

donde $s(p) = (p+1) \bmod q$ para $p \in Q$ y $V_i = \{j \in V : (i, j) \in E\}$ es el conjunto de vecinos del nodo i .

En el presente trabajo, sólo se considerarán configuraciones \vec{x} con soporte finito, que en este caso significa que todos los nodos tienen un mismo estado (sin pérdida de generalidad, todos tienen estado 0) salvo un número finito de ellos. Es importante observar que la dinámica inducida por F en las configuraciones con soporte finito está bien definida pues la función F transforma configuraciones con soporte finito en configuraciones con soporte finito.

Se definen ahora las herramientas que se introdujeron en [MG97] y que se utilizarán en el resto de este trabajo.

Definición 1.1. Sea \vec{x} una configuración del plano (\mathbb{Z}^2, Q) , es decir, una función $\vec{x} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow Q$. Se define el *esqueleto* (que notaremos $Es(\mathbb{Z}^2, \vec{x})$) como el subgrafo de \mathbb{Z}^2 compuesto por las aristas entre los vértices que tienen asociados estados vecinos en Q (los vecinos del estado k son k , $(k-1) \bmod q$, $(k+1) \bmod q$).

Sobre el subgrafo esqueleto, se puede introducir los conceptos de “camino”

1.3. EXPLICACIÓN DEL MODELO

y “ciclo”, como sigue:

Definición 1.2. Un *camino* C es una secuencia alternada de nodos y aristas $C = a_0, e_1, a_1, \dots, e_{n-1}, a_n$ con $n \geq 1$ que comienza y termina con un nodo, en la cual cada arista e_i incide en los nodos a_{i-1} y a_i . Este camino une a_0 con a_n y se denotará también $C = a_0 a_1 \dots, a_n$. El subcamino de C que une los nodos a_i con a_{i+l} se denotará $C[a_i \dots a_{i+l}]$.

A cada camino C se le asignan dos *direcciones* asociando el camino a un subgrafo dirigido con vértices $\{a_i\}_{i=0}^n$ y arcos $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ donde \vec{e}_i es el arco con nodo inicial a_{i-1} y nodo terminal a_i para todo i , o bien con nodo inicial a_i y nodo terminal a_{i-1} para todo i . En el primer caso se nombrará como su *dirección natural* y en el segundo como su *dirección inversa*.

Se dirá que un camino es un *ciclo* si $a_0 = a_n$ y $n \geq 3$ y se dirá que es un *ciclo simple* si cada nodo aparece sólo una vez.

A los ciclos, por ser caminos, también se les pueden asociar dos direcciones.

Por ejemplo, en el grafo de la Figura 1.9, $v_1 v_2 v_4 v_5 v_3 v_2$ es un camino pero no un ciclo, $v_2 v_4 v_5 v_3 v_6 v_5 v_2$ es un ciclo pero no es un ciclo simple, y $v_2 v_4 v_5 v_3 v_2$ es un ciclo simple.

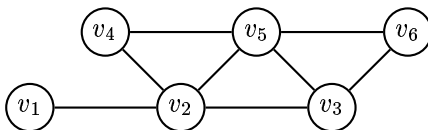


Figura 1.9: Ejemplo de camino, ciclo y ciclo simple.

Durante el resto del trabajo, los ciclos que se utilizarán son ciclos simples.

Por último se definen propiedades de los ciclos, como son el “salto”, “largo” y “eficiencia” de éstos.

Definición 1.3. Sea $\vec{x} \in Q^{\mathbb{Z}^2}$ una asignación de estados a los vértices del plano \mathbb{Z}^2 . Sea $C = i_1, \dots, i_n$ con $n \geq 2$ un camino en el esqueleto $Es(\mathbb{Z}^2, \vec{x})$, se dirá que su *largo* es $L(C) = n - 1$ y que siguiendo su “dirección natural”

1.3. EXPLICACIÓN DEL MODELO

su *salto* con respecto a \vec{x} está dado por

$$J(C, \vec{x}) = \sum_{k=2}^n \sigma(x_{k-1}, x_k)$$

$$\text{donde } x_k \text{ es el estado del nodo } i_k \text{ y } \sigma(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } s(a) = b \\ 0 & \text{si } a = b \\ -1 & \text{si } a = s(b) \end{cases}$$

Notar que $|J(C, \vec{x})| \leq L(C)$.

Definición 1.4. Sea $\vec{x} \in Q^{\mathbb{Z}^2}$ una asignación de estados a los vértices del plano \mathbb{Z}^2 , para un ciclo simple C en el esqueleto $Es(\mathbb{Z}^2, \vec{x})$, se define la *eficiencia* del ciclo con respecto a \vec{x} como

$$e(C, \vec{x}) = \frac{J(C, \vec{x})}{L(C)}$$

y se llamará *eficiencia global* del plano con respecto a \vec{x} al máximo de las eficiencias de los ciclos en el esqueleto $Es(\mathbb{Z}^2, \vec{x})$.

Por ejemplo, en la sección del plano mostrada en la Figura 1.10, están marcados con una línea las aristas que pertenecen al esqueleto. Además, se muestran tres ciclos simples, dos de 4 nodos (γ_1 y γ_2) y el ciclo que va sobre el borde (que llamaremos γ_3).

En este caso, los saltos de los ciclos son $J(\gamma_1, \vec{x}) = 3$, $J(\gamma_2, \vec{x}) = 3$ y $J(\gamma_3, \vec{x}) = 6$; y los largos de los ciclos son $L(\gamma_1) = 4$, $L(\gamma_2) = 4$ y $L(\gamma_3) = 6$; por lo que las eficiencias en cada caso son $e(\gamma_1, \vec{x}) = \frac{3}{4}$, $e(\gamma_2, \vec{x}) = \frac{3}{4}$ y $e(\gamma_3, \vec{x}) = 1$. Así la eficiencia global de este subgrafo con respecto a \vec{x} es igual a 1, de modo que el ciclo γ_3 es un ciclo de eficiencia máxima.

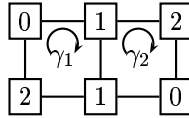


Figura 1.10: Ejemplo de ciclos, sus saltos y eficiencias.

CAPÍTULO 2

DINÁMICA PARA CONFIGURACIONES CON ESQUELETO COMPLETO

El hecho que el esqueleto sea todo \mathbb{Z}^2 es algo natural cuando $Q = \{0, 1, 2\}$, pues todas las configuraciones posibles cumplen con esto. Al exigir este esqueleto con un número de estados q mayor o igual que 4, se tienen restricciones que afectan especialmente a las eficiencias de los ciclos que se puede construir.

Nuestro primer resultado es que para $q \geq 5$ todos los ciclos tienen eficiencia 0, y que para $q = 4$ los ciclos de eficiencia máxima tienen eficiencia igual a 0 ó 1. Es decir, si $q \geq 5$ la dinámica alcanza un punto fijo, y si $q = 4$ la dinámica alcanza un punto fijo o un período igual a 4 donde cada nodo tiene una secuencia de estados $0 - 1 - 2 - 3 - 0 - 1 - \dots$

Para lograr esto, definiremos una unidad básica, llamada “baldosa” que junto a la operación de “unión de baldosas” nos permitirá escribir cualquier ciclo como unión de baldosas básicas. Esto nos será útil, pues el salto de la unión de dos ciclos es la suma del salto de cada ciclo, por lo que analizaremos las eficiencias de cada ciclo estudiando los saltos en las baldosas que lo conforman, con lo que demostraremos el primer resultado del capítulo.

La segunda parte del capítulo se dedica a estudiar las eficiencias posibles

2.1. DEFINICIONES Y RESULTADOS PREVIOS

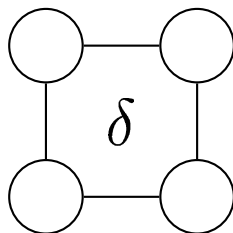
de obtener cuando $q = 3$, cuyo resultado es que se pueden lograr ciclos de cualquier eficiencia (racional) mayor o igual que $\frac{3}{4}$.

Para esto, dado un $r \in \mathbb{Q}$ con $r \geq \frac{3}{4}$ construiremos un ciclo con eficiencia igual a r y demostraremos que todo otro ciclo que exista en el plano tendrá eficiencia menor, para esto último analizaremos todos los casos posibles de ciclos que existan en el plano.

2.1 DEFINICIONES Y RESULTADOS PREVIOS

Al observar el grafo \mathbb{Z}^2 resulta natural definir una unidad básica consistente en los ciclos de largo 4 que existen. De la misma forma al tener un ciclo sobre el plano uno observa que el ciclo encierra una cantidad finita de estas unidades básicas. A esta “unidad básica” la llamaremos **baldosa**.

Definición 2.1. Sobre el grafo \mathbb{Z}^2 llamaremos **baldosa** a todo ciclo compuesto por 4 arcos y 4 nodos.



Como se dijo con anterioridad, uno puede notar que visualmente estas baldosas, al estar una al lado de la otra, pueden componer un ciclo simple sobre el plano. Esto está definido en la teoría de grafos de la siguiente forma.

Definición 2.2. Sean $\gamma_1 = i_0 e_1 i_1 \dots i_n$ y $\gamma_2 = i'_0 e'_1 i'_1 \dots i'_n$ ciclos simples, diremos que γ_1 y γ_2 son dos *ciclos unibles* si el subgrafo $\xi = (V, E) = (V(\gamma_1) \cap V(\gamma_2), E(\gamma_1) \cap E(\gamma_2))$ es un camino.

Definimos además la unión de los ciclos γ_1 y γ_2 como el ciclo formado por el subgrafo $(V(\gamma_1) \Delta V(\gamma_2) \cap ex(\xi), E(\gamma_1) \Delta E(\gamma_2))$, donde $ex(\xi)$ son los nodos extremos del camino ξ .

2.1. DEFINICIONES Y RESULTADOS PREVIOS

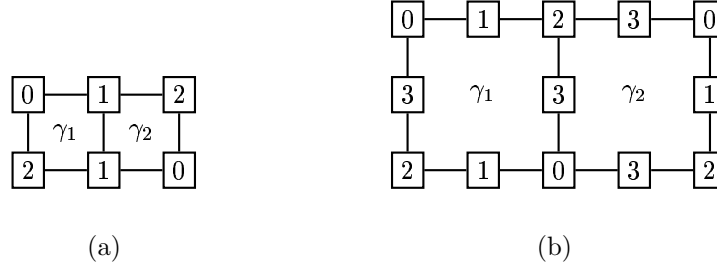


Figura 2.1: Ejemplo de dos ciclos unibles.

En los ejemplos de la Figura 2.1 los ciclos γ_1 y γ_2 son ciclos unibles, y su unión forma el ciclo $\gamma_1 \sqcup \gamma_2$, el cual va por el borde de la figura.

En nuestro caso, al tener cada nodo asociado un estado, puede suceder que la unión usual de ciclos no necesariamente sea compatible con los conceptos de “dirección del ciclo”, ni tampoco queda claro cómo es el salto de la unión de dos ciclos. Por esto, definimos una dirección que hace compatible estudiar el salto de dos ciclos, y esto nos lleva al siguiente resultado.

Lema 2.3. *Sea una configuración $\vec{x} \in Q^{\mathbb{Z}^2}$ y sean $\gamma_1 = i_0 i_1 \dots i_n$ y $\gamma_2 = j_0 j_1 \dots j_{n'}$ ciclos unibles.*

Dada una dirección para $\gamma_1 \sqcup \gamma_2$, ésta induce una dirección sobre γ_1 y γ_2 de forma tal que

$$J(\gamma_1 \sqcup \gamma_2, \vec{x}) = J(\gamma_1, \vec{x}) + J(\gamma_2, \vec{x})$$

Demostración. Sea ξ el subcamino $(V(\gamma_1) \cup V(\gamma_2), E(\gamma_1) \cup E(\gamma_2))$ formado por el hecho que γ_1 y γ_2 son unibles.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que la dirección dada a $\gamma_1 \sqcup \gamma_2$ induce una dirección sobre γ_1 y γ_2 , por lo que diremos que ξ es igual al subcamino $\gamma_1[i_0, \dots, i_l]$ y es igual a $\gamma_2[j_0, \dots, j_l]$, donde $i_k = j_{l-k}$, $k = 0 \dots l$ como se muestra en la Figura 2.2.

Luego el salto de la unión de los ciclos será

$$J(\gamma_1 \sqcup \gamma_2, \vec{x}) = J(\gamma_1[i_0 \dots i_n], \vec{x}) + J(\gamma_2[j_0 \dots j_{n'}], \vec{x})$$

2.1. DEFINICIONES Y RESULTADOS PREVIOS

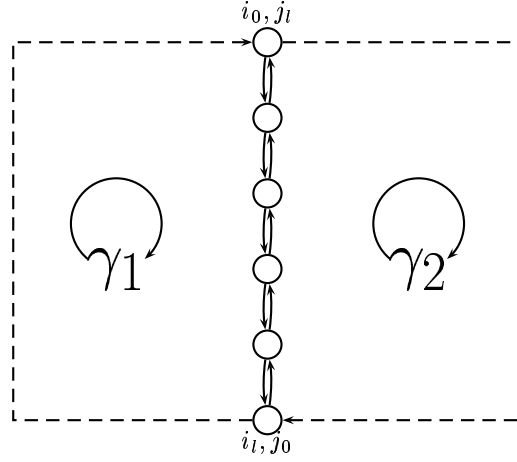


Figura 2.2: Ejemplo de la dirección utilizada en la unión de ciclos.

pero la dirección sobre cada ciclo produce que en el subcamino ξ , γ_1 tenga una dirección opuesta a la del mismo camino en γ_2 , por lo que $J(\gamma_1[i_0, \dots, i_l], \vec{x})$ es igual a $-J(\gamma_2[j_0, \dots, j_l], \vec{x})$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} J(\gamma_1 \sqcup \gamma_2, \vec{x}) &= J(\gamma_1[i_l \dots i_n], \vec{x}) + J(\gamma_2[j_l \dots j_{n'}], \vec{x}) \\ &\quad + J(\gamma_1[i_0, \dots, i_l], \vec{x}) + J(\gamma_2[j_0, \dots, j_l], \vec{x}) \\ &= J(\gamma_1, \vec{x}) + J(\gamma_2, \vec{x}) \end{aligned}$$

□

En el primer ejemplo de la Figura 2.1, si asignamos la dirección de los punteros del reloj a los ciclos, vemos que los saltos de γ_1 y γ_2 son iguales a 3 y que efectivamente el salto de $\gamma_1 \sqcup \gamma_2$ es igual a 6.

En el caso de la eficiencia de la unión de dos ciclos no se tiene una regla tan clara. Como se vio en el ejemplo anterior, dos ciclos de eficiencia $\frac{3}{4}$ al unirse formaron un ciclo de eficiencia 1, pero existen otros ciclos de eficiencia $\frac{3}{4}$ cuya unión no necesariamente tiene eficiencia 1. Lo que sí podemos asegurar es la eficiencia de la unión de ciclos de eficiencia 0, como se muestra en el siguiente corolario del teorema anterior.

Corolario 2.4. *Si γ_1 y γ_2 son dos ciclos unibles de eficiencia 0 con direcciones compatibles, entonces el ciclo $\gamma_1 \sqcup \gamma_2$ tiene eficiencia 0.*

2.1. DEFINICIONES Y RESULTADOS PREVIOS

Demostración. Como $e(\gamma_i, \vec{x}) = 0$ si y sólo si $J(\gamma_i, \vec{x}) = 0$ para $i = 1, 2$. Luego $J(\gamma_1 \sqcup \gamma_2, \vec{x}) = J(\gamma_1, \vec{x}) + J(\gamma_2, \vec{x}) = 0$, lo que demuestra la eficiencia nula de $\gamma_1 \sqcup \gamma_2$. \square

Habiendo definido la unión de ciclos cualesquiera, podemos aplicar estos resultados sobre las baldosas. De esta forma si logramos escribir cualquier ciclo como unión de baldosas, podemos analizar el salto de este ciclo con el lema anterior. Demostremos entonces que todo ciclo es unión de baldosas.

Lema 2.5. *Todo ciclo sobre \mathbb{Z}^2 es una unión de baldosas.*

Demostración. Para demostrar este lema, necesitamos introducir el concepto del “interior discreto” de un ciclo.

Definición 2.6. Sobre el grafo \mathbb{Z}^2 , un ciclo γ describe una curva cerrada en \mathbb{R}^2 , el *interior de γ* son los puntos de \mathbb{R}^2 en la parte acotada. Llamaremos *Interior Discreto de γ* (I_γ) a los puntos

$$I_\gamma = \left\{ \left(k + \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2} \right) \in \text{Int}(\gamma) \text{ y } k, l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Por ejemplo, en la Figura 2.3, los vértices del ciclo están marcados con el símbolo \circ y sus aristas por las líneas. El interior de este ciclo está en color gris y el interior discreto del ciclo está marcado con el símbolo \blacktriangle .

Procedamos ahora con la demostración. Sea γ un ciclo, demostremos la propiedad aplicando inducción sobre el tamaño del interior discreto de γ .

Si $|I_\gamma| = 1$, entonces el ciclo tiene cuatro arcos, por lo que es una baldosa.

Si $|I_\gamma| = n$, escogemos un nodo que no sea esquina. Este nodo posee un arco ν_0 que está en el interior (en \mathbb{R}^2) de γ . Si agregamos a γ el arco ν_0 y los arcos sucesivos ν_1, ν_2, \dots en la dirección definida por ν_0 (Ver Figura 2.4(a)) hasta que el arco ν_l termine en un nodo de γ , entonces $\{\nu_i\}_{i=0}^l$ divide γ en dos partes γ_1 y γ_2 donde cada parte posee interior discreto de tamaño menor que n , luego por hipótesis de inducción se obtiene el resultado.

Si todos los nodos son esquinas de γ , dada la finitud del grafo, en algún lugar se obtiene un subcamino γ_0 de la forma de la Figura 2.4(b) o rotación.

2.1. DEFINICIONES Y RESULTADOS PREVIOS

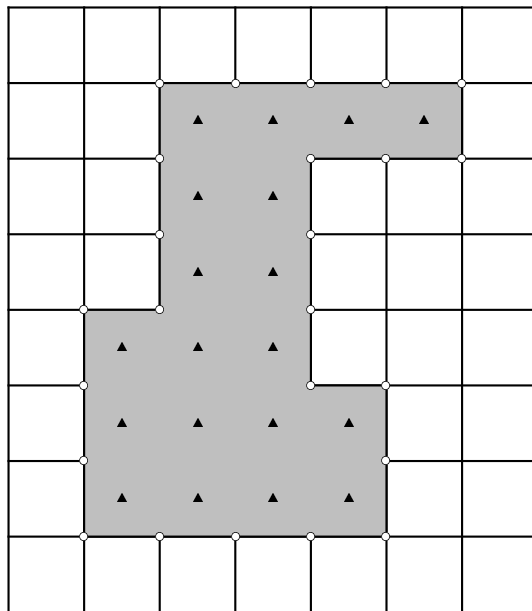


Figura 2.3: Ejemplo del interior discreto de una curva.

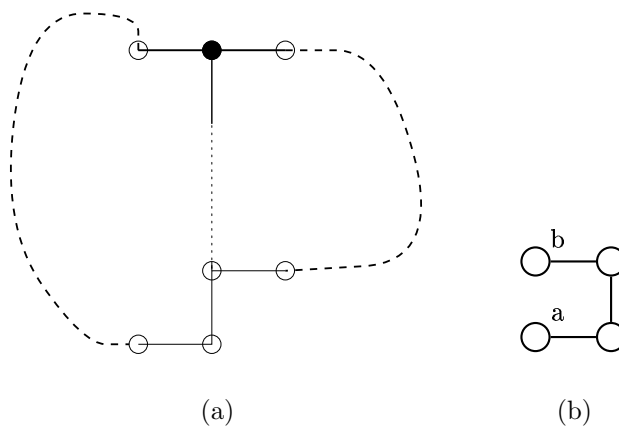


Figura 2.4: Casos posible en la demostración del Lema 2.5.

2.2. NÚMERO DE ESTADOS V/S EFICIENCIA

En este caso definimos el ciclo $\bar{\gamma}$ como $\bar{\gamma} = \gamma \setminus \gamma_0 \cup \overline{ab}$ donde \overline{ab} es el arco de \mathbb{Z}^2 que une a y b . Por lo tanto, como $\gamma_0 \cup \overline{ab}$ es una baldosa B , se tiene que $\gamma = \bar{\gamma} \sqcup B$ con $|I_{\bar{\gamma}}| = n - 1$ y por hipótesis de inducción se tiene el resultado. \square

2.2 RELACIÓN ENTRE EL NÚMERO DE ESTADOS Y LA EFICIENCIA PARA CONFIGURACIONES CON ESQUELETO COMPLETO

Como se dijo al inicio de este capítulo, el número de estados del autómata parece limitar las eficiencias posibles de asignar al plano. A continuación demostraremos cuáles son las eficiencias posibles para un número de estados q cualquiera y para configuraciones con esqueleto \mathbb{Z}^2 .

Teorema 2.7. *Sea \vec{x} una configuración con número de estados q tal que $Eq(\mathbb{Z}^2, \vec{x}) = \mathbb{Z}^2$*

1. *Si $q \geq 5$, entonces $e(\vec{x}) = 0$, luego la dinámica se estabiliza en un punto fijo.*
2. *Si $q = 4$, entonces $e(\vec{x}) \in \{0, 1\}$.*
3. *Si $q = 3$, entonces $e(\vec{x}) \geq \frac{3}{4}$.*

En la demostración de esto, utilizaremos lo demostrado en la sección anterior. Así, estudiando cómo son los saltos de las baldosas que se forman para distintos q , podremos concluir cómo son los saltos de los ciclos.

Demostración. Sea un ciclo en \mathbb{Z}^2 . Por el Lema 2.5 el ciclo está formado por la unión de baldosas δ . Por lo tanto

1. Si $q \geq 5$, cada baldosa tiene $J(\delta, \vec{x}) = 0$, pues $Eq(\mathbb{Z}^2, \vec{x}) = \mathbb{Z}^2$. Luego por el Corolario 2.4 y el Lema 2.5 se tiene que todo ciclo tiene salto 0, por lo tanto, todo ciclo tiene eficiencia nula.

2.2. NÚMERO DE ESTADOS V/S EFICIENCIA

2. Si $q = 4$, entonces cada baldosa tiene salto $J(\delta, \vec{x}) \in \{0, 4\}$. Luego si existe un ciclo γ con salto mayor que 0, entonces necesariamente \vec{x} tiene una baldosa δ con salto mayor 0, por lo que δ tiene salto $J(\delta, \vec{x}) = 4$ y largo $L(\delta, \vec{x}) = 4$ y se concluye que $e(\vec{x}) = 1$.
3. Si $q = 3$, entonces para toda baldosa δ , $J(\delta, \vec{x}) \in \{0, 3\}$. Si $J(\delta, \vec{x}) = 3$, entonces δ es un ciclo de eficiencia $\frac{3}{4}$, por lo que un ciclo de eficiencia máxima tiene eficiencia mayor o igual que $\frac{3}{4}$. Si está formado únicamente por ciclos de salto 0, tendrá eficiencia nula.

□

El único caso en que el número de estados no restringe demasiado las eficiencias globales es cuando $q = 3$. Esto es natural pues en este caso (y sólo en él) sin importar la asignación que hagamos a los nodos siempre el esqueleto será \mathbb{Z}^2 .

Aún así es posible estudiar las eficiencias posibles de lograr en este caso. Demostraremos que cuando $q = 3$ es posible obtener cualquier eficiencia racional entre $\frac{3}{4}$ y 1. Para esto, dado un racional $r \in [\frac{3}{4}, 1]$, construiremos un ciclo rectangular con esta eficiencia. Este ciclo tiene una asignación particular y una restricción en la relación entre el alto y ancho del rectángulo sobre el cual está definido.

Definición 2.8. Sea R el conjunto de ciclos rectangulares sobre \mathbb{Z}^2 donde el alto del rectángulo es mayor o igual que la quinta parte del ancho de este mismo más uno. Sea \mathcal{A}_γ la familia de configuraciones del plano tales que para el ciclo $\gamma \in R$, la configuración sobre el ciclo es concatenación de conjunto de estados de la forma (012) o (0122) y en el interior y exterior del ciclo es 0.

Observación 2.9. Para todo ciclo $\gamma \in R$ se cumple que si el alto de este ciclo es h_γ y su ancho es w_γ , entonces como $L(\gamma) = 2w_\gamma + 2h_\gamma$, se tiene que $h_\gamma \geq 1 + \frac{L(\gamma)}{10} - \frac{h_\gamma}{5}$ y simplificando se tiene que

$$3h_\gamma \geq \frac{5}{2} + \frac{L(\gamma)}{4} > 2 + \frac{L(\gamma)}{4}.$$

2.2. NÚMERO DE ESTADOS V/S EFICIENCIA

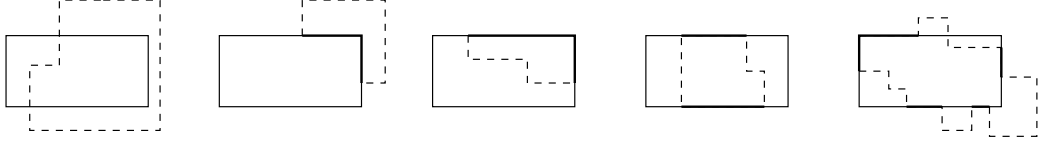


Figura 2.5: Casos posibles en la demostración del Teorema 2.10.

El ciclo formado en la construcción rectangular anterior tiene una propiedad útil: que cualquier otro ciclo que exista en \vec{x} tiene una eficiencia menor que la del ciclo inicial, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.10. *Sea un ciclo $\gamma \in R$ y una configuración $\vec{x} \in \mathcal{A}_\gamma$. Sea $\bar{\gamma}$ otro ciclo cualquiera sobre \mathbb{Z}^2 . Entonces*

$$e(\gamma, \vec{x}) > e(\bar{\gamma}, \vec{x}).$$

Demostración. Por la construcción de γ y la definición de \mathcal{A}_γ se aprecia que $e(\gamma, \vec{x}) > \frac{3}{4}$.

Analicemos primero el caso en que $\bar{\gamma}$ no comparte ningún arco con γ .

Si además no comparte ningún nodo, es un ciclo de salto 0 (pues \vec{x} vale 0 en los nodos que no pertenecen a γ), por lo que $\bar{\gamma}$ es un ciclo de eficiencia nula. Si $\bar{\gamma}$ intersecta en algún nodo a γ , como no comparte ningún arco, la sección de tres nodos de $\bar{\gamma}$ que intersecta a γ (el nodo que intersecta y sus vecinos que no están en γ) en su segundo nodo tendrá salto 0, pues el primer y el tercer nodo de esta sección tendrán asociado el estado 0. Luego, por lo mismo que en el caso anterior, $\bar{\gamma}$ tendrá salto 0 y por consecuencia, eficiencia nula.

Veamos ahora el caso en que $\bar{\gamma}$ si comparte arcos con γ .

Si $\bar{\gamma}$ comparte un camino (a, b) con γ de largo menor que la mitad del largo de γ (llamémoslo $\bar{\gamma}[a \dots b]$) y además $\bar{\gamma} \setminus \bar{\gamma}[a \dots b] \subset Ext(\gamma)$, es decir, comparte un camino y el resto está en el exterior de γ , entonces $J(\bar{\gamma}, \vec{x}) \leq$

2.2. NÚMERO DE ESTADOS V/S EFICIENCIA

$J(\bar{\gamma}[a \dots b], \vec{x}) + 2 \leq L(\bar{\gamma}[a \dots b]) + 2$. Pero $L(\bar{\gamma}) \geq 2L(\bar{\gamma}[a \dots b]) + 2$, luego

$$\begin{aligned} e(\bar{\gamma}, \vec{x}) &\leq \frac{L(\bar{\gamma}[a \dots b]) + 2}{2L(\bar{\gamma}[a \dots b]) + 2} \\ &\leq \frac{1}{2} \left(1 + \underbrace{\frac{1}{L(\bar{\gamma}[a \dots b]) + 1}}_{\geq 1} \right) \\ &\leq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

y por lo tanto, necesariamente su eficiencia es menor que r .

El caso en que $L(\bar{\gamma}[a \dots b]) > \frac{L(\gamma)}{2}$ se reducirá del caso siguiente.

Analicemos a continuación el caso en que $\bar{\gamma} \setminus \bar{\gamma}[a \dots b] \subset \text{Int}(\gamma)$. En este caso $L(\bar{\gamma})$ no necesariamente es mayor que $2L(\bar{\gamma}[a \dots b]) + 2$.

Por simpleza, llamemos a $\bar{\gamma} \setminus \bar{\gamma}[a \dots b]$ simplemente $\bar{\gamma}[b \dots a]$, y de la misma forma, separemos γ en $\gamma[a \dots b]$ y $\gamma[b \dots a]$ (donde $\gamma[a \dots b] = \bar{\gamma}[a \dots b]$).

Entonces

$$\begin{aligned} \beta &= e(\gamma, \vec{x}) - e(\bar{\gamma}, \vec{x}) = \frac{J(\gamma, \vec{x})}{L(\gamma)} - \frac{J(\bar{\gamma}, \vec{x})}{L(\bar{\gamma})} \\ &= \frac{J(\gamma, \vec{x})L(\bar{\gamma}) - J(\bar{\gamma}, \vec{x})L(\gamma)}{L(\gamma)L(\bar{\gamma})} \end{aligned}$$

pero $J(\gamma, \vec{x}) = J(\gamma[a \dots b], \vec{x}) + J(\gamma[b \dots a], \vec{x})$. Luego

$$\beta = \frac{J(\gamma[a \dots b], \vec{x})L(\bar{\gamma}) + J(\gamma[b \dots a], \vec{x})L(\bar{\gamma}) - J(\bar{\gamma}, \vec{x})L(\gamma)}{L(\gamma)L(\bar{\gamma})}$$

Además, $J(\bar{\gamma}, \vec{x}) = J(\bar{\gamma}[a \dots b], \vec{x}) + J(\bar{\gamma}[b \dots a], \vec{x}) = J(\gamma[a \dots b], \vec{x}) + \bar{\alpha}$, donde $\bar{\alpha} \in \{0, 1, 2\}$ pues en el interior de γ los nodos tienen estado 0. De modo que,

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{J(\gamma[a \dots b], \vec{x})(L(\bar{\gamma}) - L(\gamma)) + J(\gamma[b \dots a], \vec{x})L(\bar{\gamma})}{L(\gamma)L(\bar{\gamma})} \\ &\quad - \frac{\bar{\alpha}L(\gamma)}{L(\gamma)L(\bar{\gamma})} \end{aligned}$$

2.2. NÚMERO DE ESTADOS V/S EFICIENCIA

Ahora, el largo de $\bar{\gamma}$ satisface $L(\bar{\gamma}) = L(\bar{\gamma}[a \dots b]) + L(\bar{\gamma}[b \dots a])$, y lo mismo ocurre con γ . Por esto

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{J(\gamma[a \dots b], \bar{x})(L(\bar{\gamma}[b \dots a]) + L(\bar{\gamma}[a \dots b]) - L(\gamma[b \dots a]) - L(\gamma[a \dots b]))}{L(\gamma)L(\bar{\gamma})} \\ &\quad + \frac{J(\gamma[b \dots a], \bar{x})L(\bar{\gamma})}{L(\gamma)L(\bar{\gamma})} - \frac{\bar{\alpha}}{L(\bar{\gamma})} \\ &= \frac{J(\gamma[a \dots b], \bar{x})(L(\bar{\gamma}[b \dots a]) - L(\gamma[b \dots a]))}{L(\gamma)L(\bar{\gamma})} \\ &\quad + \frac{J(\gamma[b \dots a], \bar{x})L(\bar{\gamma})}{L(\gamma)L(\bar{\gamma})} - \frac{\bar{\alpha}}{L(\bar{\gamma})} \end{aligned}$$

nuevamente, descomponiendo $L(\bar{\gamma})$ en $L(\bar{\gamma}[a \dots b]) + L(\bar{\gamma}[b \dots a])$, que es igual a $L(\gamma[a \dots b]) + L(\bar{\gamma}[b \dots a])$ se obtiene que

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{J(\gamma[a \dots b], \bar{x})(L(\bar{\gamma}[b \dots a]) - L(\gamma[b \dots a]))}{L(\gamma)L(\bar{\gamma})} \\ &\quad + \frac{J(\gamma[b \dots a], \bar{x})(L(\bar{\gamma}[b \dots a]) + L(\gamma[a \dots b]))}{L(\gamma)L(\bar{\gamma})} - \frac{\bar{\alpha}}{L(\bar{\gamma})} \end{aligned}$$

reagrupando tenemos que

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{(J(\gamma[a \dots b], \bar{x}) + J(\gamma[b \dots a], \bar{x}))L(\bar{\gamma}[b \dots a])}{L(\gamma)L(\bar{\gamma})} \\ &\quad + \frac{J(\gamma[b \dots a], \bar{x})L(\gamma[a \dots b]) - J(\gamma[a \dots b], \bar{x})L(\gamma[b \dots a])}{L(\gamma)L(\bar{\gamma})} \\ &\quad - \frac{\bar{\alpha}}{L(\bar{\gamma})} \end{aligned}$$

y como $J(\gamma[a \dots b], \bar{x}) + J(\gamma[b \dots a], \bar{x}) = J(\gamma, \bar{x})$ el valor de β es

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{J(\gamma, \bar{x})L(\bar{\gamma}[b \dots a])}{L(\gamma)L(\bar{\gamma})} \\ &\quad + \frac{\overbrace{\left[\frac{J(\gamma[b \dots a], \bar{x})}{L(\gamma[b \dots a])} - \frac{J(\gamma[a \dots b], \bar{x})}{L(\gamma[a \dots b])} \right]}^{\dagger} L(\gamma[b \dots a])L(\gamma[a \dots b])}{L(\gamma)L(\bar{\gamma})} \\ &\quad - \frac{\bar{\alpha}}{L(\bar{\gamma})}. \end{aligned}$$

2.2. NÚMERO DE ESTADOS V/S EFICIENCIA

Sabemos que $e(\gamma, \vec{x}) \geq \frac{3}{4}$, por lo tanto,

$$J(\gamma, \vec{x}) \geq \frac{3}{4}L(\gamma)$$

y además, la configuración sobre γ es de la forma $((012) + (0122))^*$, por lo que el menor valor de (\dagger) se obtiene cuando $\gamma[b \dots a] \approx (0122)^*$ y $\gamma[a \dots b] \approx (012)^*$, con lo que probamos la desigualdad

$$\left[\frac{J(\gamma[b \dots a], \vec{x})}{L(\gamma[b \dots a])} - \frac{J(\gamma[a \dots b], \vec{x})}{L(\gamma[a \dots b])} \right] \geq \frac{-1}{4}.$$

Con esto se obtiene

$$e(\gamma, \vec{x}) - e(\bar{\gamma}, \vec{x}) \geq \frac{3L(\gamma)L(\bar{\gamma}[b \dots a]) - L(\gamma[b \dots a])L(\gamma[a \dots b])}{4L(\gamma)L(\bar{\gamma})} - \frac{\bar{\alpha}}{L(\bar{\gamma})}.$$

Ahora, si escribimos $L(\gamma[b \dots a]) = \lambda L(\gamma)$ y por lo mismo $L(\gamma[a \dots b]) = (1 - \lambda)L(\gamma)$ para $\lambda \in [0, 1]$ se tiene que

$$\begin{aligned} e(\gamma, \vec{x}) - e(\bar{\gamma}, \vec{x}) &\geq \frac{L(\gamma)}{L(\gamma)L(\bar{\gamma})} (3L(\bar{\gamma}[b \dots a]) - \lambda(1 - \lambda)L(\gamma)) - \frac{\bar{\alpha}}{L(\bar{\gamma})} \\ &\geq \frac{1}{L(\bar{\gamma})} [3L(\bar{\gamma}[b \dots a]) - \lambda(1 - \lambda)L(\gamma) - 2]. \end{aligned}$$

Ahora, si a y b no se encuentran en caras opuestas del ciclo, se tiene que $L(\bar{\gamma}[b \dots a]) \geq \min(L(\gamma[a \dots b]), L(\gamma[b \dots a]))$. Sin pérdida de generalidad podemos decir que $L(\bar{\gamma}[b \dots a]) > (1 - \lambda)L(\gamma)$, con lo que la desigualdad quedaría

$$\begin{aligned} e(\gamma, \vec{x}) - e(\bar{\gamma}, \vec{x}) &\geq \frac{1}{L(\bar{\gamma})} [(3 - \lambda)L(\bar{\gamma}[b \dots a]) - 2] \\ &\geq \frac{2}{L(\bar{\gamma})} (L(\bar{\gamma}[b \dots a]) - 1) \\ &> 0. \end{aligned}$$

En el caso que a y b se encuentran en caras opuestas del ciclo, se deduce que $L(\bar{\gamma}[b \dots a]) \geq h_\gamma$ y como $\lambda(1 - \lambda) \leq \frac{1}{4}$ se tiene la desigualdad

$$e(\gamma, \vec{x}) - e(\bar{\gamma}, \vec{x}) \geq \frac{1}{L(\bar{\gamma})} \left[3h_\gamma - \frac{1}{4}L(\gamma) - 2 \right]$$

2.2. NÚMERO DE ESTADOS V/S EFICIENCIA

y por la observación (2.9) se tendrá el resultado.

Claramente el caso en que $\bar{\gamma}$ comparta dos caminos con γ situados en los extremos opuestos del ciclo, se puede reducir al anterior.

Por último, veamos el caso general de un ciclo cualquiera $\bar{\gamma}$ que intersecta al ciclo rectangular γ .

Sea A el conjunto de nodos $a_i \in \bar{\gamma}$ tales que $a_i \in \gamma \cap \bar{\gamma}$ y que uno de los nodos vecinos en γ no pertenezca a $\gamma \cap \bar{\gamma}$. Asumamos que este conjunto está ordenado sobre γ , es decir que el nodo a_{i+1} está inmediatamente después del nodo a_i en el sentido de γ . Buscamos ahora el ciclo con mayor salto posible que se puede hacer que pase por los nodos a_i .

Sea además C el conjunto de los caminos de γ que parten y terminan en nodo perteneciente a A , es decir

$$C = \{\delta \subseteq \gamma / \delta \text{ es un camino, } s(\delta) = a_j \in A \text{ y } t(\delta) = a_k \in A\}$$

donde el valor k no necesariamente es $j + 1$. Tomemos $\{\bar{\delta}_i\} \subset C$ tal que $J(\{\bar{\delta}_i\}, \vec{x}) = \text{máx } J(\{\delta_i\}, \vec{x})$ donde el máximo se toma sobre todos los subconjuntos $\{\delta_i\}$ de C tales que $\delta_i \cap \delta_j = \emptyset$ $i \neq j$. Podemos asumir que al igual que antes los caminos $\{\bar{\delta}_i\}$ están ordenados sobre el ciclo γ en el sentido del salto y con índices cíclicos, esto debido a que el mayor salto se logra con todos los caminos δ_i orientados en el sentido del salto.

Se tiene

$$J(\bar{\gamma}, \vec{x}) \leq J(\{\bar{\delta}_i\}, \vec{x}) + \sum_i C_{\bar{\delta}_i} \quad \text{con } C_{\bar{\delta}_i} = \begin{cases} 2 & \text{si } t(\bar{\gamma}_i) = 2 \text{ y } s(\bar{\gamma}_{i+1}) = 1 \\ 1 & \text{si } (t(\bar{\gamma}_i) = 0 \text{ y } s(\bar{\gamma}_{i+1}) = 1) \\ & \text{o } (t(\bar{\gamma}_i) = 2 \text{ y } s(\bar{\gamma}_{i+1}) = 0) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Ahora, si $t(\bar{\delta}_i)$ y $s(\bar{\delta}_{i+1})$ pertenecen al mismo lado del rectángulo γ o a lados adyacentes, agregamos al conjunto $\{\bar{\delta}_i\}$ el camino sobre γ que une ambos nodos. Observemos que este camino tendrá salto mayor o igual a $C_{\bar{\delta}_i}$. En el caso que los nodos pertenezcan a lados opuestos de γ , agregamos el camino más corto entre ambos nodos, el cual pasará por $Int(\gamma)$ y tendrá salto igual a $C_{\bar{\delta}_i}$. Al unir de esta forma todos los nodos de A creamos un ciclo (llamémoslo $\hat{\gamma}$) el cual cumple que $J(\bar{\gamma}, \vec{x}) \leq J(\hat{\gamma}, \vec{x})$.

2.2. NÚMERO DE ESTADOS V/S EFICIENCIA

Por otro lado, $\hat{\gamma}$ es uno de los ciclos más cortos que une los nodos de A , luego $L(\bar{\gamma}) \geq L(\hat{\gamma})$, por lo cual se cumple que $e(\bar{\gamma}, \vec{x}) \leq e(\hat{\gamma}, \vec{x})$, pero anteriormente vimos que $e(\hat{\gamma}, \vec{x}) \leq e(\gamma, \vec{x})$, lo cual concluye la demostración. \square

El hecho de que el ciclo formado originalmente sea de eficiencia máxima dada cualquier asignación en \mathcal{A}_γ , implica que si una de esas asignaciones tiene eficiencia r , podemos construir un ciclo de forma que el autómata tenga eficiencia global igual a r .

Veremos entonces que con \mathcal{A}_γ (es decir, con concatenación de (012) y (0122)) podemos formar eficiencias igual a cualquier racional en $[\frac{3}{4}, 1]$.

Teorema 2.11. *Si el número de estados es $q = 3$, entonces $\forall r \in \mathbb{Q} \cap [\frac{3}{4}, 1]$ existe una configuración \vec{x} para \mathbb{Z}^2 tal que $e(\vec{x}) = r$.*

Demostración. Construiremos un ciclo $\gamma \in R$ con eficiencia r , y luego usando el Teorema 2.10 tendremos el resultado.

Sea $r = \frac{p}{q} < 1$ $p, q \in \mathbb{N}$. Sea un ciclo γ construido por concatenación de n veces (012) y m veces (0122), con $m = 3K(q - p)$ y $n = K(4p - 3q)$ donde K es un número entero par. Observar que m y n son enteros no negativos ya que $\frac{3}{4} \leq r \leq 1$ y que la paridad de K asegura que el largo de la secuencia sea par y por lo tanto sea posible de construir.

Entonces $J(\gamma, \vec{x}) = 3 \cdot (m + n) = 3(3K(q - p) + K(4p - 3q)) = 3Kp$ y $L(\gamma) = 3n + 4m = 3(K(4p - 3q)) + 4(3K(q - p)) = 3Kq$, por lo tanto, $e(\gamma, \vec{x}) = \frac{p}{q} = r$ y por el Teorema 2.10 se tiene que $e(\vec{x}) = r$. \square

CAPÍTULO 3

JUSTIFICACIÓN DE LAS SECUENCIAS UTILIZADAS

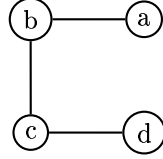
El capítulo 2 nos muestra que, para un número de estados mayor que 5, si deseamos obtener ciclos de eficiencia positiva, necesitamos considerar esqueletos que no sean \mathbb{Z}^2 .

Un problema importante al trabajar con esqueletos no completos es poder asegurar la estabilidad de éste, es decir, que no se agregarán nuevos arcos en el tiempo.

Durante el desarrollo de la presente memoria, analizamos formas de construir ciclos sobre el grafo de una eficiencia dada, que posean esqueleto estable. El principal problema en este estudio fueron los nodos interiores del ciclo, pues normalmente forman un ciclo de eficiencia mayor o igual a la del ciclo original. Esto nos llevó a estudiar ciclos sobre el grafo sin (o con muy pocos) nodos interiores, y a buscar cuales son las condiciones que debe cumplir la asignación de estados sobre este grafo para asegurar la estabilidad del esqueleto.

Al realizar este estudio se observó que la parte del ciclo que agrega más condiciones a las asignaciones válidas son las esquinas del ciclo, por lo que nos dedicamos a estudiar este subgrafo obteniendo así un resultado general.

El resultado es el siguiente: si en el esqueleto estable aparece un subgrafo de la forma

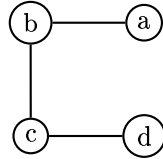


o rotaciones de éste, entonces las asignaciones a los nodos a , b , c y d debe tener un “orden” y la secuencia de estados de cada nodo no puede tener subsecuencias del tipo jjj o $jj(j+1)(j+1)$.

Para probar esto, analizaremos la evolución de los nodos a , b , c y d asegurándonos que en el esqueleto no aparezca el arco (ad) .

Primero probaremos la condición en el “orden” de los estados del subgrafo.

Lema 3.1. *Supongamos que una vez estabilizado el esqueleto aparece en él un subgrafo del plano como sigue:*



o rotaciones.

Si $\mathbf{X}_i(\mathbf{t})$ denota los estados de la posición i en los tiempos t , entonces

$$\forall t \quad X_a(t) \preceq X_b(t) \preceq X_c(t) \preceq X_d(t) \quad (3.0.1)$$

o

$$\forall t \quad X_a(t) \succeq X_b(t) \succeq X_c(t) \succeq X_d(t).$$

donde $X_a(t) \preceq X_b(t) \preceq X_c(t) \preceq X_d(t)$ significa que $X_a(t) - X_a(t) \pmod{q} \leq X_b(t) - X_a(t) \pmod{q} \leq X_c(t) - X_a(t) \pmod{q} \leq X_d(t) - X_a(t) \pmod{q}$.

Donde la relación de orden es en los naturales. Esto está bien definido pues la mayor diferencia posible es entre $X_d(t)$ y $X_a(t)$, pero dadas las uniones en el esqueleto, este valor será en módulo menor que 3 y como $q > 3$ no se producirá ambigüedad.

Demostración. De ahora en adelante, usaremos la notación $d(a, b) = \min(a - b, b - a) \pmod{q}$.

Supongamos que (3.0.1) se cumple para $t - 1$. Vamos a probar que si no se cumple alguna desigualdad para t , el arco (a, d) se agrega al esqueleto.

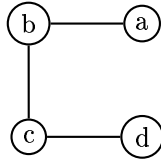
Si $X_a(t) \succ X_b(t)$, esto entonces significa que $X_a(t - 1) = X_b(t - 1) = \alpha$ para algún α , y por lo tanto, $X_b(t) = X_b(t - 1) = \alpha$. Pero esto significa que $X_c(t - 1) = \alpha$ pues si no, b cambiaría de estado en t . Esto significa que $X_a(t - 1) = X_c(t - 1)$ y como $d(X_c(t - 1), X_d(t - 1)) \leq 1$, se tiene que $d(X_a(t - 1), X_d(t - 1)) \leq 1$, lo que es una contradicción pues el arco (a, d) estaría en el esqueleto.

El mismo argumento es válido si $X_b(t) \succ X_c(t)$.

Si $X_c(t) \succ X_d(t)$, entonces $X_c(t - 1) = X_d(t - 1) = \alpha$ y $X_d(t - 1) = X_d(t) = \alpha$, por lo que $X_b(t - 1) = \alpha - 1$ y $X_a(t - 1) = \alpha - 2$, pues si no $d(X_a(t - 1), X_d(t - 1)) \leq 1$. Pero esto significa que $X_d(t) = \alpha$ y $X_a(t) = \alpha - 1$, por lo que el arco (a, d) estaría en el esqueleto. \square

Conociendo ya que la secuencia debe tener un “orden”, veamos cuáles son las propiedades mínimas que se le tiene que pedir a la secuencia.

Lema 3.2. *Supongamos que una vez estabilizado el esqueleto aparece un subgrafo del plano como sigue:*



o rotaciones. Entonces $X_i(t)$ para $i = a, b, c, d$ satisfacen:

$$X_i(t) \neq X_i(t+2) \quad (3.0.2)$$

$$X_i(t+3) \neq s(X_i(t)). \quad (3.0.3)$$

Demostración. Observemos que como $d(X_a(t), X_d(t)) \geq 2 \forall t$, se necesita que

$$X_d(t) \succeq X_a(t) + 2 \wedge X_c(t) \succeq X_a(t) + 1 \quad \forall t. \quad (3.0.4)$$

■ Para $i = a$. Supongamos que $X_a(t-1) = \alpha$.

• Demostremos que $X_a(t+2) \neq X_a(t)$.

Supongamos que $X_a(t) = X_a(t+1) = \alpha + 1$. Queremos demostrar que $X_a(t+2) \neq \alpha + 1$. Por (3.0.4) sabemos que $X_c(t-1) \succeq \alpha + 1$, pero si fuera $\alpha + 2$, entonces $X_b(t-1) = \alpha + 1$, $X_b(t) = \alpha + 2$ y $X_a(t+1) = \alpha + 2$. Por lo tanto, $X_c(t-1) = \alpha + 1$ y $X_d(t-1) = \alpha + 2$. Por otro lado, si $X_a(t+1) = X_a(t) = \alpha + 1$, necesariamente $X_b(t) = \alpha + 1$. Esto y lo anterior conjuntamente implican que

$$\begin{aligned} X_d(t-1) = \alpha + 2 &\Rightarrow X_c(t) = \alpha + 2 \\ &\Rightarrow X_b(t+1) = \alpha + 2 \\ &\Rightarrow X_a(t+2) = \alpha + 2 \end{aligned}$$

lo que termina la demostración.

• Demostremos que $X_a(t+3) \neq s(X_a(t)) = s(\alpha + 1) = \alpha + 2$.

Si $X_a(t+1) = \alpha + 2$ por lo demostrado anteriormente se tiene que $X_a(t+3) \neq X_a(t+1) = \alpha + 2$.

Si $X_a(t+1) = \alpha + 1$ se tiene, por la construcción de la demostración anterior, que $X_c(t) = \alpha + 2$, $X_b(t) = \alpha + 1$ y por (3.0.4) necesariamente $X_d(t) = \alpha + 3$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} X_d(t) = \alpha + 3 &\Rightarrow X_c(t+1) = \alpha + 3 \\ &\Rightarrow X_b(t+2) = \alpha + 3 \\ &\Rightarrow X_a(t+3) = \alpha + 3 \neq \alpha + 2 \end{aligned}$$

lo que termina la demostración.

t+3				$\alpha + 3$
t+2			$\alpha + 3$	$\alpha + 2$
t+1		$\alpha + 3$	$\alpha + 2$	$\alpha + 1$
t	$\alpha + 3$	$\alpha + 2$	$\alpha + 1$	$\alpha + 1$
t-1	$\alpha + 2$	$\alpha + 1$?	α
T	$X_d(T)$	$X_c(T)$	$X_b(T)$	$X_a(T)$

Cuadro 3.1: Evolución del grafo para $i = a$.

- Para $i = b$. Supongamos que $X_b(t - 1) = \alpha$.

- Demostremos que $X_b(t + 2) \neq X_b(t)$.

Nuevamente supongamos que $X_b(t) = X_b(t+1) = \alpha+1$. Queremos demostrar que $X_b(t+2) \neq \alpha+1$. Sabemos entonces que $X_a(t-1) = \alpha \vee \alpha - 1$. Si fuera α por (3.0.4) se necesita que $X_c(t-1) = \alpha + 1$ y $X_d(t-1) = \alpha + 2$ lo que implicaría que $X_c(t) = \alpha + 2$ y por lo tanto, $X_b(t+1) = \alpha + 2$, lo que no puede suceder. Por lo tanto, $X_a(t-1) = \alpha - 1$ y $X_d(t-1) = \alpha + 1$, luego $X_a(t) = \alpha \wedge X_a(t+1) = \alpha + 1$ y necesariamente $X_d(t) = \alpha + 2 \wedge X_d(t+1) = \alpha + 3$.

Por otro lado, si $X_b(t+1) = X_b(t) = \alpha + 1$, necesariamente $X_c(t) = \alpha + 1$. Esto y lo anterior conjuntamente implican que

$$X_d(t) = \alpha + 2 \Rightarrow X_c(t+1) = \alpha + 2 \Rightarrow X_b(t+2) = \alpha + 2,$$

que es lo que se quiere demostrar.

- Demostremos que $X_b(t + 3) \neq s(X_b(t)) = s(\alpha + 1) = \alpha + 2$.

Si $X_b(t+1) = \alpha + 2$ por lo demostrado anteriormente se tiene que $X_b(t+3) \neq X_b(t+1) = \alpha + 2$.

Si $X_b(t+1) = \alpha+1$ se tiene, por la construcción de la demostración anterior, que $X_d(t+1) = \alpha+3$, $X_c(t+1) = \alpha+2$ y $X_b(t+2) = \alpha+2$, por lo tanto,

$$X_d(t+1) = \alpha + 3 \Rightarrow X_c(t+2) = \alpha + 3 \Rightarrow X_b(t+3) = \alpha + 3,$$

lo que termina la demostración.

- Para $i = c$. Supongamos que $X_c(t - 1) = \alpha$.

t+3			$\alpha + 3$	
t+2		$\alpha + 3$	$\alpha + 2$	
t+1	$\alpha + 3$	$\alpha + 2$	$\alpha + 1$	$\alpha + 1$
t	$\alpha + 2$	$\alpha + 1$	$\alpha + 1$	α
t-1	$\alpha + 1$?	α	$\alpha - 1$
T	$X_d(T)$	$X_c(T)$	$X_b(T)$	$X_a(T)$

Cuadro 3.2: Evolución del grafo para $i = b$.

- Demostremos que $X_c(t + 2) \neq X_c(t)$.
 Nuevamente supongamos que $X_c(t) = X_c(t+1) = \alpha + 1$. Queremos demostrar que $X_c(t + 2) \neq \alpha + 1$. Para que se cumpla necesitamos que $X_d(t) = \alpha + 1$ y por (3.0.4) implica que $X_a(t) = \alpha - 1$ y $X_b(t) = \alpha$. Pero entonces $X_a(t+1) = \alpha$ lo que obliga que $X_d(t+1) = \alpha + 2$, por lo que $X_c(t + 2) = \alpha + 2$, que es lo que queremos demostrar.
- Demostremos que $X_c(t + 3) \neq s(X_c(t)) = s(\alpha + 1) = \alpha + 2$.
 Si $X_c(t+1) = \alpha + 2$ por lo demostrado anteriormente se tiene que $X_c(t + 3) \neq X_c(t + 1) = \alpha + 2$.
 Si $X_c(t+1) = \alpha + 1$ se tiene, por la construcción de la demostración anterior, que $X_d(t + 1) = \alpha + 2$ y $X_a(t + 1) = \alpha$, ahora como $X_b(t + 1) = \alpha + 1$, entonces $X_a(t + 2) = \alpha + 1$ lo que por (3.0.4) obliga que $X_d(t + 2) = \alpha + 3$, por lo que $X_c(t + 3) = \alpha + 3$, lo que termina la demostración.

t+3		$\alpha + 3$		
t+2	$\alpha + 3$	$\alpha + 2$		$\alpha + 1$
t+1	$\alpha + 2$	$\alpha + 1$	$\alpha + 1$	α
t	$\alpha + 1$	$\alpha + 1$	α	$\alpha - 1$
t-1		α		
T	$X_d(T)$	$X_c(T)$	$X_b(T)$	$X_a(T)$

Cuadro 3.3: Evolución del grafo para $i = c$.

- Para $i = d$. Supongamos que $X_d(t - 1) = \alpha$.
 - Demostremos que $X_d(t + 2) \neq X_d(t)$.
 Nuevamente supongamos que $X_d(t) = X_d(t+1) = \alpha + 1$, queremos demostrar que $X_d(t + 2) \neq \alpha + 1$. Por (3.0.4) sabemos que $X_a(t) =$

$\alpha - 1 \vee \alpha - 2$. Si fuera $\alpha - 2$, entonces $X_b(t) = \alpha - 1$ y $X_c(t) = \alpha$. Si fuera $\alpha - 1$, entonces nuevamente por (3.0.4) $X_a(t+1) = \alpha - 1$ lo que obliga que $X_b(t) = \alpha - 1$ y por lo tanto, $X_c(t) = \alpha$.

Entonces, en ambos casos, $X_c(t+1) = \alpha + 1$, $X_b(t+1) = \alpha$ y $X_a(t+1) = \alpha - 1$. Luego, como $X_b(t+1) = \alpha$ implica que $X_a(t+2) = \alpha$ y por (3.0.4) $X_d(t+1) = \alpha + 2$, que es lo que queremos demostrar.

- Demostremos que $X_d(t+3) \neq s(X_d(t)) = s(\alpha + 1) = \alpha + 2$.

Si $X_d(t+1) = \alpha + 2$ por lo demostrado anteriormente se tiene que $X_d(t+3) \neq X_d(t+1) = \alpha + 2$.

Si $X_d(t+1) = \alpha + 1$ se tiene, por la construcción de la demostración anterior, que $X_c(t+1) = \alpha + 1$, $X_b(t+1) = \alpha$ y $X_a(t+1) = \alpha - 1$, por lo tanto,

$$X_c(t+1) = \alpha + 1 \Rightarrow X_b(t+2) = \alpha + 1 \Rightarrow X_a(t+3) = \alpha + 1$$

y por (3.0.4) implica que $X_d(t+1) = \alpha + 3$, lo que termina la demostración.

t+3	$\alpha + 3$		$\alpha + 1$	
t+2	$\alpha + 2$		$\alpha + 1$	α
t+1	$\alpha + 1$	$\alpha + 1$	α	$\alpha - 1$
t	$\alpha + 1$	α	$\alpha - 1$?
t-1	α			
T	$X_d(T)$	$X_c(T)$	$X_b(T)$	$X_a(T)$

Cuadro 3.4: Evolución del grafo para $i = d$.

□

CAPÍTULO 4

CONSTRUCCIÓN DE CONFIGURACIONES CANDIDATAS

En el presente capítulo, deseamos adaptar las construcciones hechas anteriormente (Figura 1.4) al grafo \mathbb{Z}^2 .

Para lograr esto debemos construir ciclos de una eficiencia dada y de distintos largos, y asegurarnos que estos ciclos sean de eficiencia máxima. Si logramos construir estos ciclos, debemos ubicarlos en el plano de forma de obtener un nodo con período igual al mínimo común múltiplo de los largos de los ciclos.

Sean C_1 y C_2 regiones finitas y disjuntas de \mathbb{Z}^2 . Veremos que si asignamos estados a C_1 y C_2 de modo que el borde de ambas tenga estado 1 y con esqueleto estable, y dejamos los nodos exteriores en estado 0, el sistema evolucionará de modo que los nodos del plano seguirán la secuencia de la región más cercana a ellos, creando así una frontera en los nodos equidistantes a ambas regiones y obteniendo sobre la frontera una secuencia que no pertenece a ninguno de las dos regiones, sino a una mezcla entre ellas (Ver Figura 4.1). Este comportamiento queda justificado por los resultados obtenidos en [MG97] para un grafo cualquiera. Lo anterior se extiende a n regiones.

Con esto bastará con construir asignaciones a subgrafos finitos de \mathbb{Z}^2 cuyo borde tenga nodos con estado 1 y con esqueleto estable. Nosotros veremos

4.1. INTERACCIÓN ENTRE CONFIGURACIONES

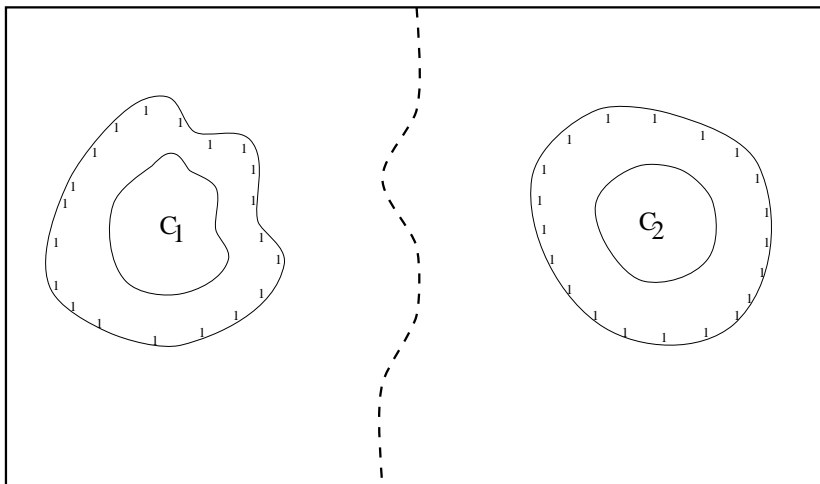


Figura 4.1: Esquema de la separación del plano en dos partes.

rectángulos.

Primero supondremos que tenemos un ciclo de eficiencia máxima y estudiaremos cómo lo insertamos en el plano (que posee sólo nodos con estado 0) de forma que no se creen nuevos ciclos de eficiencia mayor.

En segundo lugar nos dedicaremos a construir los ciclos propiamente tal. La construcción de estos ciclos será iterativa, tendremos una secuencia de largo n y salto q con la cual haremos inicialmente un ciclo de eficiencia $\frac{q}{n}$. Posteriormente entregaremos un algoritmo para crear, a partir de un ciclo de largo $(k-1)n$ y salto $(k-1)q$, uno de largo kn y salto kq que tendrá, por lo tanto, la misma eficiencia que el anterior. A estos ciclos los iremos completando por medio de baldosas de salto 0 de forma tal que nos quede un rectángulo con el ciclo inicial en el borde.

4.1 INTERACCIÓN ENTRE DOS O MÁS CONFIGURACIONES

Lo primero que haremos es contestar la pregunta que originó el estudio de la presente memoria, demostrando que en el caso del grafo \mathbb{Z}^2 sí es posible obtener nodos con períodos no polinomiales.

4.1. INTERACCIÓN ENTRE CONFIGURACIONES

4.1.1 Evolución del plano con dos configuraciones

Para estudiar la evolución de los nodos del plano, usaremos un resultado de [MG97] el que dice:

Proposición 4.1. *Sea $\vec{x} \in Q^V$, si el esqueleto es estable entonces*

$$F_i^L(\vec{x}) = s^{a(i,L,\vec{x})}(\vec{x})$$

donde $F_i^L(\vec{x})$ es el estado del nodo i en L etapas más, y $a(i, L, \vec{x})$ es el máximo de los saltos de todos los caminos de largo menor o igual a L que parten de i .

Esta proposición será de gran utilidad para conocer el comportamiento de cada nodo analizando simplemente sus caminos de salto máximo.

Supondremos que poseemos dos ciclos de eficiencia máxima con asignaciones de estado \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 donde el borde posee estado $a_0 = 1$ y donde la secuencia de estados en los nodos de cada ciclo es parecida, es decir, el estado del nodo i del primer ciclo (a_i^1) y el estado del nodo $i - 1$ del segundo ciclo (a_{i-1}^2) cumplen que $a_i^1 - a_{i-1}^2 \in \{0, 1\}$.

Demostraremos que al iterar la red de autómatas, el plano se divide en dos, donde cada nodo adquiere la secuencia de estados dada por el ciclo más “cercano” al nodo.

Definamos la noción de *distancia* de un nodo a un ciclo.

Definición 4.2. En lo que sigue llamamos *distancia* de un nodo x_0 a un subgrafo C al largo del camino más corto entre x_0 y algún nodo de C y lo notaremos como $dist(x_0, C)$.

Con esta definición podemos usar la proposición 4.1 para conocer cuál es el valor del estado de un nodo en etapas futuras.

Teorema 4.3. *Sea C_1 y C_2 dos subgrafos que poseen un ciclo de eficiencia máxima con secuencias asociadas \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 respectivamente, donde las secuencias son parecidas¹ y donde los nodos del borde poseen estado $a_0 = 1$.*

¹es decir, $a_i^1 - a_{i-1}^2 \in \{0, 1\}$

4.1. INTERACCIÓN ENTRE CONFIGURACIONES

Sea un nodo $x_0 \in \mathbb{Z}^2$ (o simplemente nodo 0) tal que $x_0 \notin C_1 \cup C_2$ y llamemos $d_i = \text{dist}(x_0, C_i)$ con $i = 1, 2$. Entonces

$$\forall L \quad F_0^L(\vec{x}) = \begin{cases} a_{L-d_1}^1 & \text{si } d_1 < d_2 \\ a_{L-d_2}^2 & \text{si } d_2 < d_1 \\ \text{máx}\{a_{L-d_1}^1, a_{L-d_2}^2\} & \text{si } d_1 = d_2 \end{cases}$$

donde $\text{máx}\{u, v\} = u$ si $u \in \{v, s(v)\}$ y $\text{máx}\{u, v\} = v$ si $v \in \{u, s(u)\}$ y asumiendo la secuencia a_i^j como cíclica.

Demostración. Denotemos como $G(k, L)$ al conjunto de caminos de largo menor o igual a L que parten del nodo k . Analicemos el camino que parte de x_0 , de largo menor o igual a L y que tenga el máximo salto posible.

Como d_i es la distancia a C_i , ese camino irá de x a C_i una distancia d_i y luego recorrerá la secuencia a_i^j por $L - d_i$ nodos, por lo tanto,

$$\text{máx}(J(G(x_0, L))) = \text{máx}(J(0a_0^1a_1^1 \dots a_{L-d_1}^1), J(0a_0^2a_1^2 \dots a_{L-d_2}^2)).$$

Si $d_1 < d_2$, entonces $d_1 \leq d_2 - 1$, esto implica que el salto $J(0a_0^2 \dots a_{L-d_2}^2) \leq J(0a_0^2 \dots a_{L-d_1-1}^2)$, por lo que

$$\text{máx}(J(G(x_0, L))) = \text{máx}(J(0a_0^1a_1^1 \dots a_{L-d_1}^1), J(0a_0^2a_1^2 \dots a_{L-d_1-1}^2)).$$

Pero la secuencias \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 son tales que $\forall i, a_i^1 - a_{i-1}^2 \in \{0, 1\}$, por lo que

$$\text{máx}(J(G(x_0, L))) = J(0a_0^1a_1^1 \dots a_{L-d_1}^1) = a_{L-d_1}^1.$$

Luego, por la proposición (4.1), se tiene que

$$F_0^L(\vec{x}) = s^{a_{L-d_1}^1}(\vec{x}) = a_{L-d_1}^1$$

y si $d_1 = d_2$, entonces

$$\text{máx}(J(G(x_0, L))) = \text{máx}(a_{L-d_1}^1, a_{L-d_2}^2)$$

por lo que

$$F_0^L(\vec{x}) = s^{\text{máx}(a_{L-d_1}^1, a_{L-d_2}^2)}(\vec{x}) = \text{máx}(a_{L-d_1}^1, a_{L-d_2}^2).$$

□

4.1. INTERACCIÓN ENTRE CONFIGURACIONES

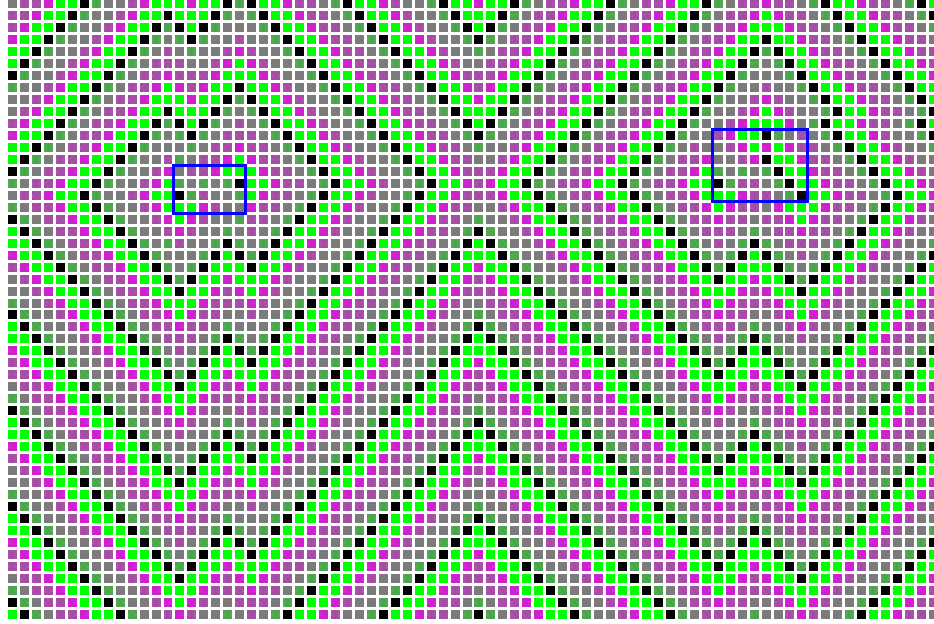


Figura 4.2: Ejemplo de la separación del plano producto de dos ciclos de eficiencia máxima. (Figura 1.8)

Esto nos indica que el plano se divide en dos partes dependiendo de la distancia de los nodos a cada región y que (si existe) la línea equidistante a cada región tendrá una secuencia dependiente de ambos ciclos.

El Teorema 4.3 puede ser naturalmente generalizado a n ciclos, lo que nos permite encontrar nodos del plano con una evolución dependiente de los n ciclos.

El siguiente teorema entrega el resultado principal de este trabajo, comprobando que podemos encontrar un nodo del plano con un período igual al mínimo común múltiplo de los largos de los n ciclos.

Teorema 4.4. *Dado un nodo $x_0 \in \mathbb{Z}^2$ podemos ubicar configuraciones C_i $i = 1 \dots n$ de largo $l \cdot r_i$ con secuencias asociadas \mathcal{A}_i en \mathbb{Z}^2 tales que $T(x_0) = l \cdot \kappa$, donde $\kappa = mcm\{r_i\}$.*

Demostración. Ubicamos los ciclos C_i de forma tal que $dist(x_0, C_i) = D \forall i$.

4.2. CICLOS DE PERÍODO DADO

Luego

$$\text{máx } J(G(x_0, L)) = \text{máx}_i J(0a_0^i \dots a_{L-D}^i) = \text{máx}_i a_{L-D}^i.$$

Por lo tanto

$$F_0^L(\vec{x}) = s^{\text{máx}_i J(0a_0^i \dots a_{L-D}^i)}(\vec{x}) = \text{máx}_i a_{L-D}^i.$$

Luego, si la secuencia \mathcal{A}_i está compuesta por $r_i - 1$ veces una secuencia de la forma $(1223 \dots 0)$ y luego la misma secuencia cambiando sólo el segundo valor, es decir

$$(1223 \dots 0)^{(r_i-1)}(1123 \dots 0)$$

entonces para $L = kl + d$ (con $d < l$) se tiene

$$F_0^{kl+d}(\vec{x}) = \text{máx}_i a_{kl+d-D}^i = \begin{cases} a_{kl+d-D}^1 = \dots = a_{kl+d-D}^n & \text{si } d - D \neq 2 \\ 1 & \text{si } d - D = 2 \text{ y } k = \text{mcm}\{r_i\} = \kappa \\ 2 & \text{si } d - D = 2 \text{ y } k \neq \text{mcm}\{r_i\} \end{cases}$$

por lo tanto la secuencia del nodo x_0 será

$$(122 \dots 0)^{\kappa-1}(112 \dots 0)$$

por lo que $T(x_0) = \kappa \cdot l$. □

Con esto, hemos demostrado que si logramos construir regiones con ciclos de eficiencia máxima y con estado 1 en el borde, podemos lograr períodos que cumplen con la cota inferior buscada.

En lo que sigue, nos dedicaremos a estudiar la construcción de estos ciclos.

4.2 CONSTRUCCIÓN DE CICLOS CON PERÍODOS PREDETERMINADOS

Supongamos que poseemos un ciclo de eficiencia máxima sobre el borde de un rectángulo, estudiaremos que hay que agregarle a éste para lograr una

4.2. CICLOS DE PERÍODO DADO

estructura que posea en el borde sólo nodos con estado igual a 1, de manera que el esqueleto no sea cambiado. Además nos interesa que al situarnos en un nodo perteneciente al borde de esta estructura, el camino de mayor salto partiendo de este nodo sea tal que contenga la secuencia de estados del ciclo interior, para así poder utilizar las propiedades anteriormente demostradas.

La primera solución a esto es, dado un nodo i del rectángulo con estado a_i , agregar a la columna de nodos del exterior que parte de este nodo los estados a_{i-1} , a_{i-2} , hasta llegar a $a_j = 1$, como se muestra en la Figura 4.3.

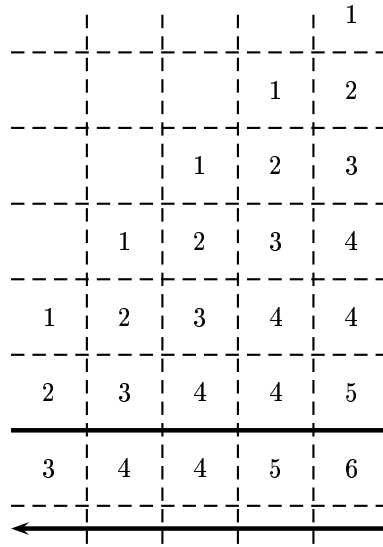


Figura 4.3: Primera completación para un ciclo rectangular.

Este llenado tiene la propiedad de que el esqueleto del exterior del rectángulo es completo, lo cual asegura que no habrá otro ciclo de eficiencia mayor, salvo para la columna que va sobre el nodo con estado 0 posterior a un nodo con estado 1. El problema ocurre porque la columna sobre el nodo con estado 0 tiene $q - 1, \dots, 1$, mientras que la columna sobre el nodo con estado 1 sólo tiene nodos con estado 0.

Esto lo remediamos, pero para esto debemos dar condiciones sobre las asignaciones de estados que tendrá el ciclo.

Definición 4.5. Dada una eficiencia $\frac{q}{n}$, llamaremos \mathcal{A}_k a la familia de asignaciones (a_i) sobre un ciclo C_k de largo kn en un conjunto de estados

4.2. CICLOS DE PERÍODO DADO

$Q = \{0, 1, \dots, q - 1\}$ que cumplen con:

1. $a_{i+1} \in \{a_i, s(a_i)\}$
2. $a_{i+3} \notin \{a_i, s(a_i)\}$
3. $\forall i, J(a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+n-1}) \in \{q - 1, q\}$
4. $J(a_0, \dots, a_{kn}) = kq$

Las dos primeras condiciones se explican por lo estudiado en el capítulo 3, la tercera condición dice que cualquier camino de largo n tiene salto igual a $q - 1$ o q , y la última condición asegura que al recorrer todo el ciclo el salto total es kq , lo que nos asegura que la eficiencia del ciclo será $\frac{q}{n}$.

Dada estas condiciones, podemos resolver la dificultad anterior agregando al ciclo rectangular lo siguiente: para cada nodo i tal que $a_i = 1$, agregamos nodos vecinos a los nodos $i, i + 1, \dots, i + \frac{n}{2} - 1$ y le asignamos un estado que depende de la distancia al nodo i , de forma que si el nodo está a distancia d del nodo i , le asignamos estado a_{i-d} , como se muestra en la Figura 4.4 (para referirnos a esta estructura, la llamaremos “protección”). Luego a esta estructura le aplicamos el llenado anteriormente explicado, obteniendo así un resultado como el de la Figura 4.5.

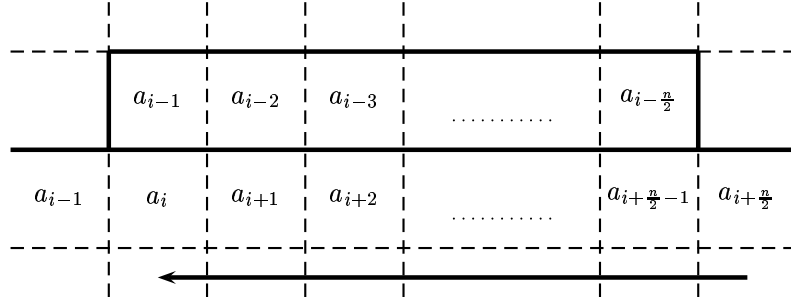


Figura 4.4: Solución a la primera completación de un ciclo rectangular.

Demostremos que esto remedia el problema anterior. Es claro que dos nodos vecinos con estados a_{i-1} y a_i tienen a los nodos de las columnas sobre ellos conectados, pues los k -ésimos nodos de cada columna tendrán estados

4.2. CICLOS DE PERÍODO DADO

		1					
1	2	1					1
2	2	2	1			1	2
2	3	2	2	1	2	2	2
3	4	3	2	2	2	2	3
4	0	4	3	2	3	4	4
0	1	2	2	3	4	4	0

Figura 4.5: Segunda completación para un ciclo rectangular.

a_{i-k} y a_{i-k-1} , y como $a_{i-k} \in \{a_{i-k-1}, s(a_{i-k-1})\}$, estarán conectados en el esqueleto.

Esto ocurre con todos los nodos que no están involucrados en la protección.

Las columnas que van sobre los nodos de la protección cumplen la misma propiedad, por lo que sólo falta estudiar si la columna sobre los nodos $i - 1$ y $i + \frac{n}{2}$ se conectan con las columnas sobre los extremos de la protección.

En el caso de la columna sobre el nodo $i - 1$, el primer nodo de esta columna tiene estado a_{i-2} y su vecino (el nodo sobre el nodo i) tiene estado a_{i-1} por lo que estarán conectados en el esqueleto, y así toda la columna sobre ellos.

En el caso de la columna sobre el nodo $i + \frac{n}{2}$, el primer nodo de esta columna tiene estado $a_{i+\frac{n}{2}-1}$, y su vecino (el nodo sobre el nodo $i + \frac{n}{2} - 1$) tiene estado $a_{i-\frac{n}{2}}$, y por la tercera propiedad de las asignaciones de estados, $J(a_{i-\frac{n}{2}} \dots a_{i+\frac{n}{2}-1}) \in \{q, q - 1\}$, que dicho de otra forma significa que $a_{i-\frac{n}{2}} \in \{a_{i+\frac{n}{2}-1}, s(a_{i+\frac{n}{2}-1})\}$, por lo que están conectados en el esqueleto y así las

4.2. CICLOS DE PERÍODO DADO

columnas sobre ellos.

Ya hemos demostrado que el exterior del ciclo y de la protección cumple con los requerimientos pedidos, sólo faltaría demostrar que esta protección es estable, es decir, que su esqueleto no se modificará (esto último no será demostrado pues modificaremos nuevamente la forma de la protección).

En resumen, la utilización de una protección sobre los nodos con estado 1 resuelve el problema y logramos obtener una completación del ciclo a una estructura con estado 1 en el borde. El problema que ocurre al hacer esto es que la protección forma un ciclo de salto q y largo n , por lo que es un ciclo de eficiencia máxima, y por lo tanto este ciclo dominará el plano en vez del ciclo original (pues tiene la misma eficiencia y está más cercano al exterior de la estructura).

Para evitar esto, modificaremos la protección en un extremo para formar un ciclo del mismo salto pero de mayor largo (y por lo tanto, de menor eficiencia).

La modificación a la protección se puede observar en la Figura 4.6.

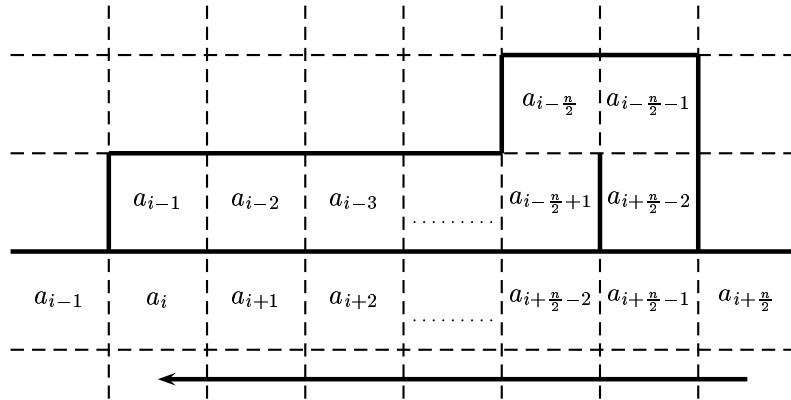


Figura 4.6: Protección definitiva para completar un ciclo rectangular.

La conexión entre las columnas sobre los nodos es igual que antes salvo para las columnas sobre el nodo $i + \frac{n}{2}$ y el extremo derecho de la protección.

Debemos justificar que la protección está en el esqueleto, es decir, que los

4.2. CICLOS DE PERÍODO DADO

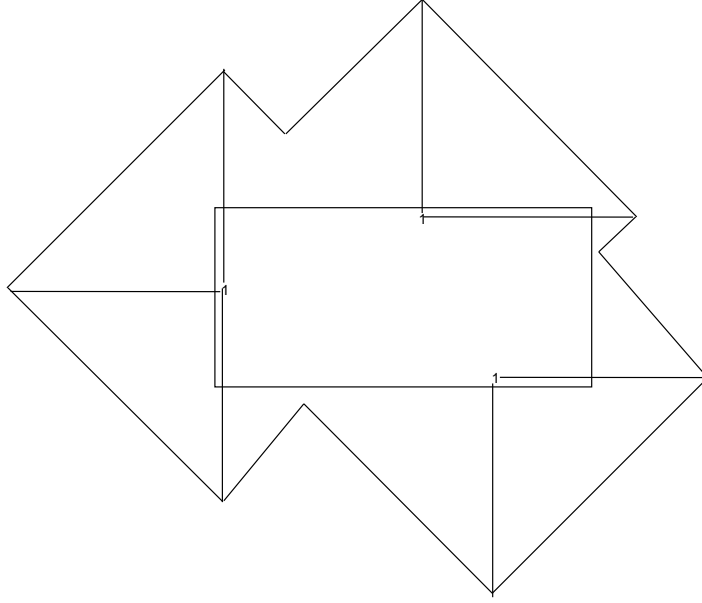


Figura 4.7: Forma final del ciclo construido.

estados $a_{i+\frac{n}{2}-2}$ y $a_{i-\frac{n}{2}-1}$ son contiguos en el conjunto Q . Esto sucede pues $J(a_{i-\frac{n}{2}-1} \dots a_{i+\frac{n}{2}-2}) \in \{q, q-1\}$ por la tercera condición de las asignaciones de estados, luego $a_{i-\frac{n}{2}-1} \in \{a_{i+\frac{n}{2}-2}, s(a_{i+\frac{n}{2}-2})\}$ y por lo tanto está en el esqueleto.

El primer nodo de la columna sobre el nodo $i + \frac{n}{2}$ posee estado $a_{i+\frac{n}{2}-1}$ por lo que se conecta con su vecino de la izquierda (tiene estado $a_{i+\frac{n}{2}-2}$), y el segundo nodo de la columna posee estado $a_{i+\frac{n}{2}-2}$ y su vecino de la izquierda posee estado $a_{i-\frac{n}{2}-1}$ por lo que por la misma razón anterior, estarán en el esqueleto, y por lo tanto las columnas sobre estos nodos también estarán conectadas.

El resultado de esta construcción es una Figura “diagonal irregular” como la de la Figura 4.7 y 4.8

Luego, hemos encontrado una forma de completar un ciclo rectangular de forma de que tenga sólo nodos con estado 1 en el borde, sin que se formen nuevos ciclos de mayor o igual eficiencia.

4.2. CICLOS DE PERÍODO DADO

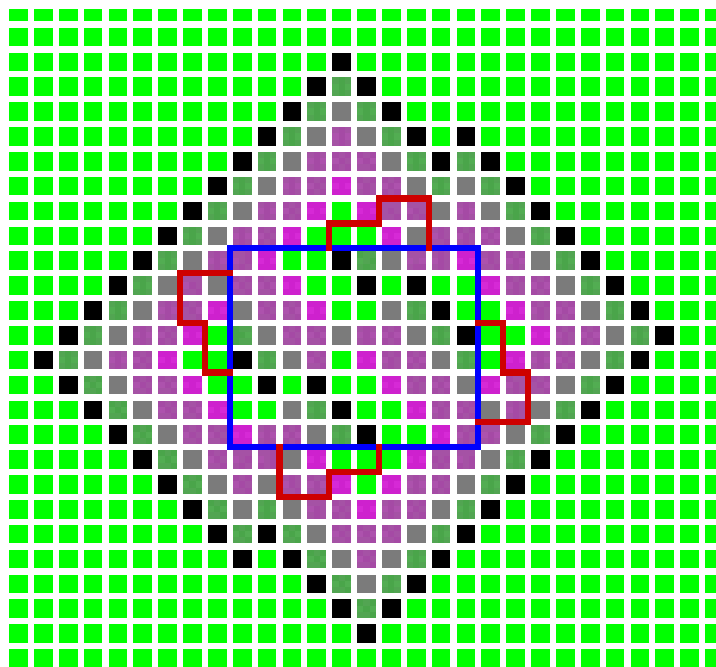


Figura 4.8: Forma final del ciclo construido (experimental).

4.3. CONSTRUCCIÓN DE CICLOS EN UN RECTÁNGULO

4.3 CONSTRUCCIÓN DE CICLOS EN UN RECTÁN- GULO

Dado lo anterior, podemos preocuparnos de construir un ciclo sobre un rectángulo sin preocuparnos de lo que pase al exterior de este.

Lo primero entonces es construir ciclos de una misma eficiencia (máxima) y de distintos largos. En el grafo \mathbb{Z}^2 esto no es tan simple pues los nodos que quedan al interior del ciclo pueden formar nuevos ciclos de eficiencia mayor a la buscada, por esto nuestros ciclos tendrán la menor cantidad posible de nodos al interior del ciclo.

Observación 4.6. Durante el resto del capítulo, asumimos que el conjunto de estados Q es igual a $Q = \{0, 1, 2, 3, \dots, q - 1\}$ con $q \geq 4$.

En nuestro caso inicial, ubicaremos el ciclo sobre un rectángulo de $\frac{n}{2}$ por 2 celdas, es decir, no habrá celdas al interior del ciclo.

4.3.1 Construcción inicial (*Caso $k=1$*)

Sea n par y \mathcal{C}_1 el subgrafo de \mathbb{Z}^2 de forma rectangular con ancho $\frac{n}{2}$ nodos y 2 nodos de alto, como se muestra en la Figura 4.9.

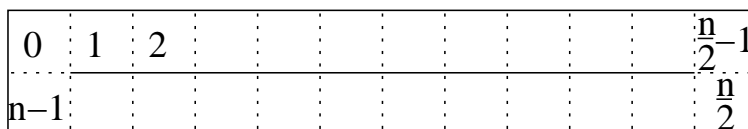


Figura 4.9: Ciclo inicial ($k = 1$).

Numeramos los nodos de \mathcal{C}_1 desde 0 a $n - 1$, siendo el nodo 0 el de más arriba a la izquierda, y en orden correlativo siguiendo los punteros del reloj.

Ahora debemos definir la asignación de los estados que le aplicaremos al ciclo. Debemos preocuparnos que al asignar los estados el esqueleto sólo tenga un ciclo (el construido) y no se formen nuevos ciclos de mayor eficiencia o de igual eficiencia y menor largo. Además debemos preocuparnos que el salto de este ciclo sea q .

4.3. CONSTRUCCIÓN DE CICLOS EN UN RECTÁNGULO

Con todas estas condiciones, definimos \mathcal{A}_1 como la familia de configuraciones dada por

$$\mathcal{A}_1 = \left\{ a : \mathcal{C}_1 \rightarrow Q / \forall i \in \{0, \dots, n-1\} \begin{array}{l} a_{i+1} \in \{a_i, s(a_i)\} \pmod n \\ a_{i+3} \notin \{a_i, s(a_i)\} \pmod n \\ J(a_0 a_1 \dots a_{n-1}) = q \end{array} \right\}$$

Esta familia tiene la propiedad de que con la asignación \mathcal{A}_1 el esqueleto de \mathcal{C}_1 tiene un sólo ciclo, en efecto, sea

$$S_1 = (V(\mathcal{C}_1), E) \text{ donde } (i, j) \in E \iff \begin{cases} |i - j| = 1 & i, j \geq 1 \\ i = 1, j = n \end{cases}.$$

Entonces el esqueleto de \mathcal{C}_1 para cada configuración en \mathcal{A}_1 será S_1 como se demuestra en el siguiente lema.

Lema 4.7.

$$\forall a \in \mathcal{A}_1, \quad Es(\mathcal{C}_1, a) = S_1$$

Demostración. Veamos que $S_1 \subseteq Es(\mathcal{C}_1, a)$.

Como $(i, j) \in E \iff \min(|i - j|, n - |i - j|) \leq 1$,

- si $|i - j| \leq 1$, entonces $a_i \in \{a_j, s(a_j)\}$ o $a_j \in \{a_i, s(a_i)\}$, por lo que $(i, j) \in Es(\mathcal{C}_1, a)$.
- si $n - |i - j| \leq 1$, entonces $n - 1 \leq |i - j|$, lo que significa que $i = n - 1$ y $j = 0$, o $i = 0$ y $j = n - 1$ y como $a_0 \in \{a_{n-1}, s(a_{n-1})\}$, entonces $(i, j) \in Es(\mathcal{C}_1, a)$.

Veamos ahora que si $\min(|i - j|, n - |i - j|) \geq 2$, entonces $(i, j) \notin Es(\mathcal{C}_1, a)$.

Para cualquier nodo i de \mathcal{C}_1 , sus vecinos son $i + 1, i - 1$ y $n - i - 1 \pmod n$, por lo que sólo hay que probar que $(i, n - i - 1) \notin Es(\mathcal{C}_1, a)$.

Si $i = 1$, sabemos que $a_1 = a_{n+1} \notin \{a_{n-2}, s(a_{n-2})\}$ y que si $i = \frac{n}{2} - 2$, entonces $a_{\frac{n}{2}+1} \notin \{a_{\frac{n}{2}-2}, s(a_{\frac{n}{2}-2})\}$.

Para $i = 2, \dots, \frac{n}{2} - 3$, lo demostraremos por contradicción.

4.3. CONSTRUCCIÓN DE CICLOS EN UN RECTÁNGULO

Supongamos que $a_i \in \{a_{n-i-1}, s(a_{n-i-1})\}$ o que $a_{n-i-1} \in \{a_i, s(a_i)\}$.

En el primer caso ($a_i \in \{a_{n-i-1}, s(a_{n-i-1})\}$), dadas las propiedades de \mathcal{A}_1 , se tiene que $a_i \in \{a_{n+i-1}, s(a_{n+i-1})\}$, entonces

$$\{a_{n-i-1}, s(a_{n-i-1})\} \cap \{a_{n+i-1}, s(a_{n+i-1})\} \neq \emptyset.$$

La secuencia cumple que $s(a_k) \in \{a_{k+1}, a_{k+2}\}$, pues $a_{k+1} \in \{a_k, s(a_k)\}$ y $a_{k+3} \notin \{a_k, s(a_k)\}$. Luego si $a_{k+1} = a_k$, entonces $a_{k+2} = s(a_k)$, pues si no se tendría que $a_{k+2} \in \{a_{k-1}, s(a_{k-1})\}$.

Luego, se cumple que

$$\{a_{n-i-1}, a_{n-i}, a_{n-i+1}\} \cap \{a_{n+i-1}, a_{n+i}, a_{n+i+1}\} \neq \emptyset.$$

Ahora, si $a_k = a_l \Rightarrow |k - l| \leq 1$ o $|k - l| = n - 1$, pero en nuestro caso $k, l \in \{n - i - 1, n - i, n - i + 1, n + i - 1, n + i, n + i + 1\}$.

Luego

$$\begin{aligned} |(n + i - 1) - (n - i + 1)| \leq |k - l| \leq |(n + i + 1) - (n - i - 1)| \\ 2i - 2 \leq |k - l| \leq 2i + 2 \end{aligned}$$

pero como $2 \leq i \leq \frac{n}{2} - 3$, entonces $2 \leq |k - l| \leq n - 4 \forall k, l$. Luego $a_k \neq a_l \forall k, l$, lo que es una contradicción.

El segundo caso es igual al primero salvo por un cambio de índices. \square

Una vez que tenemos la asignación de estados y conocemos su esqueleto nos debemos preocupar de que en las etapas futuras se siga manteniendo la misma familia de asignaciones y el mismo esqueleto, para tener el esqueleto estabilizado. El siguiente lema muestra que lo primero se cumple, y más aún, que si la celda i tiene asignado el estado a_i , entonces en j etapas más tendrá el estado a_{i+j} . Esto junto al Lema 4.7 nos asegura que el esqueleto está estabilizado.

Lema 4.8.

$$F(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_1$$

4.3. CONSTRUCCIÓN DE CICLOS EN UN RECTÁNGULO

Demostración. Probaremos que $F_i(a) = a_{i+1}$.

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$ el nodo i sólo está conectado en el esqueleto con los nodos $i - 1$ e $i + 1$, y como $a_{i+1} \in \{a_i, s(a_i)\}$ su evolución dependerá sólo del nodo $i + 1$. Luego

$$F_i(a) = \begin{cases} a_i & \text{si } a_{i+1} = a_i \\ s(a_i) & \text{si } a_{i+1} = s(a_i) \end{cases} \quad (4.3.1)$$

lo que significa que $F_i(a) = a_{i+1}$. Luego $F(a) = \sigma(a)$, donde σ es la función “shift” y es fácil ver que si $a \in \mathcal{A}_1$, entonces $\sigma(a) \in \mathcal{A}_1$. \square

Corolario 4.9.

$$\forall a \in \mathcal{A}_1, \quad Es(\mathcal{C}, a) = Es(\mathcal{C}, F(a)) = S_1$$

En resumen, sabemos que a la grilla \mathcal{C}_1 podemos asociarle una asignación $a \in \mathcal{A}_1$ y de esta forma \mathcal{C}_1 tendrá un esqueleto estable, es decir, un esqueleto que no cambiará en las siguientes iteraciones de la red.

Nuestro propósito ahora es construir un ciclo de largo $2n$ y una familia de secuencias \mathcal{A}_2 que cumpla las mismas propiedades que antes. Esto lo haremos en forma iterativa, asumiendo que poseemos un ciclo de largo $(k - 1)n$ y veremos cómo lo extendemos a un ciclo de largo kn .

4.3.2 Ampliación de la construcción inicial

Caso $k-1 \rightarrow k$.

Dado el ciclo \mathcal{C}_{k-1} de largo $(k - 1)n$, lo modificaremos en su extremo superior derecho para agregarle nuevos nodos, dejando el nuevo ciclo \mathcal{C}_k de largo kn . Esta transformación se aprecia en la Figura 4.10.

La numeración de los nodos será de la misma forma que antes para los nodos en el borde de la grilla. Los nodos interiores se anotarán como Γ_{p+1} , con $p = 1 \dots k - 1$.

4.3. CONSTRUCCIÓN DE CICLOS EN UN RECTÁNGULO

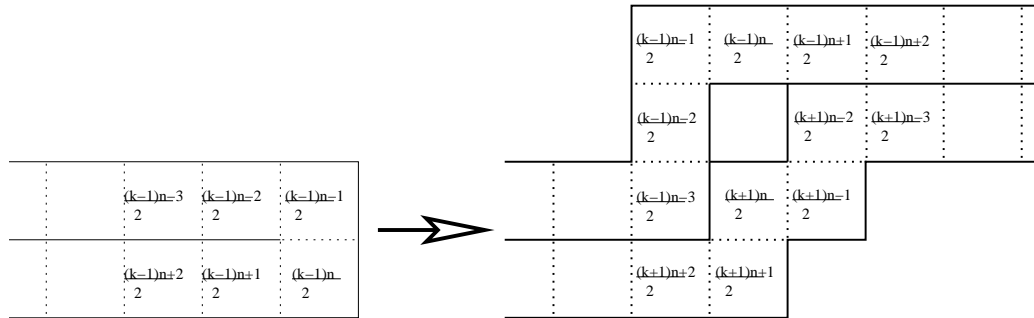


Figura 4.10: Ampliación del ciclo $k - 1$ a k .

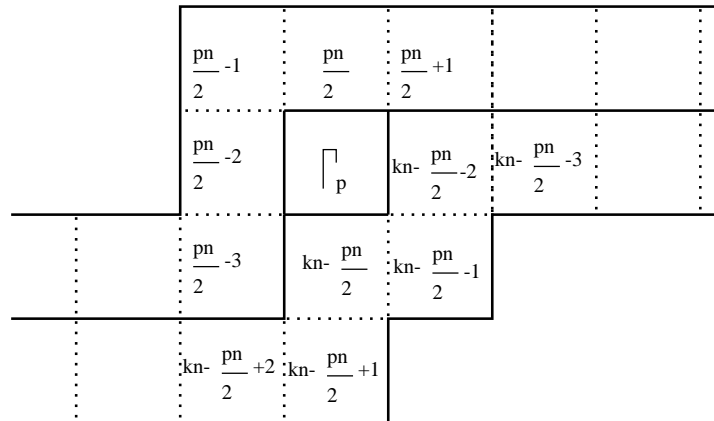


Figura 4.11: Ejemplo de la numeración usada.

4.3. CONSTRUCCIÓN DE CICLOS EN UN RECTÁNGULO

Al igual que antes, definimos la familia de asignaciones a los nodos de \mathcal{C}_k como \mathcal{A}_k de la siguiente forma:

$$\mathcal{A}_k = \left\{ a : \mathcal{C}_k \rightarrow Q / \begin{array}{l} \forall i \quad \forall p \in \{0, \dots, k-1\} : \\ a_{pn+i+1} \in \{a_i, s(a_i)\} \quad (\text{mód } kn) \\ a_{pn+i+3} \notin \{a_i, s(a_i)\} \quad (\text{mód } kn) \\ a_{\Gamma_p} = \text{máx}(a_{\frac{pn}{2}-3}, a_{kn-\frac{pn}{2}-3}) \\ J(a_i \dots a_{pn+i}) \in \{pq-1, pq, pq+1\} \\ J(a_1 \dots a_{kn}) = kq \end{array} \right\}$$

donde $\text{máx}\{u, v\} = u$ si $u \in \{v, s(v)\}$ y $\text{máx}\{u, v\} = v$ si $v \in \{u, s(u)\}$.

Este ciclo con esta configuración posee en el interior un nodo más que en el paso anterior. El estado que quede asignado a este nodo debe ser elegido de forma que no produzca nuevos ciclos. Esto se hace tomando el máximo del valor entre las celdas $kn - \frac{pn}{2} - 3$ y $\frac{pn}{2} - 3$. Es necesario estudiar qué pasa cuando los valores de estas celdas no son los mismos.

Observación 4.10. Si $a_{kn-\frac{pn}{2}-3} \neq a_{\frac{pn}{2}-3}$, como el estado $a_{kn-\frac{pn}{2}-3}$ es igual a $a_{(k-p)n+\frac{pn}{2}-3}$, entonces $a_{kn-\frac{pn}{2}-3}$ y $a_{\frac{pn}{2}-3}$ pertenecen a $\{a_{\frac{pn}{2}-4}, s(a_{\frac{pn}{2}-4})\}$, por lo tanto, necesariamente en este caso se tiene que $a_{\Gamma_p} = s(a_{\frac{pn}{2}-4}) = s(a_{\frac{pn}{2}-3})$.

Al igual que antes, definimos $S_k = (V(\mathcal{C}_k), E)$, donde

$$(i, j) \in E \iff \begin{cases} |i - j| = 1 & i, j \geq 1 \\ i = 1, j = kn \\ i = \Gamma_p, j = \frac{pn}{2} - 2 & \forall p = 1 \dots k-1 \\ i = \Gamma_p, j = kn - \frac{pn}{2} - 2 & \forall p = 1 \dots k-1 \end{cases}$$

y probamos que S_k es el esqueleto del ciclo para una asignación de estados en \mathcal{A}_k .

Lema 4.11.

$$\forall a \in \mathcal{A}_k, \quad Es(\mathcal{C}_k, a) = S_k$$

Demostración. Sea $p \in \{1, 2, \dots, k-1\}$.

- $S_k \subseteq Es(\mathcal{C}_k, a)$, ya que al igual que en el Lema 4.7, los arcos $(i, i+1)$ y $(kn, 1)$ están en $Es(\mathcal{C}_k, a)$, porque $a_{i+1} \in \{a_i, s(a_i)\}$. El arco $(\Gamma_p, \frac{pn}{2}-2)$

4.3. CONSTRUCCIÓN DE CICLOS EN UN RECTÁNGULO

está en el esqueleto, pues $a_{\frac{pn}{2}-2} \in \{a_{\frac{pn}{2}-3}, s(a_{\frac{pn}{2}-3})\} \subseteq \{a_{\Gamma_p}, s(a_{\Gamma_p})\}$. Lo mismo ocurre $(\Gamma_p, kn - \frac{pn}{2} - 2)$, pues al cumplirse que $a_{kn - \frac{pn}{2} - 2} = a_{(k-p)n + \frac{pn}{2} - 2}$, se tiene que $a_{kn - \frac{pn}{2} - 2} \in \{a_{\frac{pn}{2}-3}, s(a_{\frac{pn}{2}-3})\}$.

- Veamos que $Es(\mathcal{C}_k, a) \setminus S_k = \emptyset$.

En efecto, Al igual que en el Lema 4.7, los arcos $(\frac{pn}{2} + i, kn - (\frac{pn}{2} + i) - 1) \forall p = 0 \dots k + 1$ y $\forall i = 2 \dots (\frac{n}{2} + 2)$ no están en $Es(\mathcal{C}_k, a)$. Sólo falta demostrar que los arcos $(kn - \frac{pn}{2}, \frac{pn}{2} - 3)$ y $(\Gamma_p, kn - \frac{pn}{2})$ no están en el esqueleto.

El arco $(kn - \frac{pn}{2}, \frac{pn}{2} - 3)$ no está en el esqueleto, pues $a_{kn - \frac{pn}{2}} = a_{(k-p)n + \frac{pn}{2}}$, luego $a_{kn - \frac{pn}{2}} \notin \{a_{\frac{pn}{2}-3}, s(a_{\frac{pn}{2}-3})\}$.

- Por último, el arco $(\Gamma_p, kn - \frac{pn}{2})$ no está en el esqueleto, pues $a_{kn - \frac{pn}{2}} \notin \{a_{kn - \frac{pn}{2} - 3}, s(a_{kn - \frac{pn}{2} - 3})\}$ y $a_{kn - \frac{pn}{2}} \notin \{a_{\frac{pn}{2}-3}, s(a_{\frac{pn}{2}-3})\}$, por lo que se concluye que $a_{kn - \frac{pn}{2}} \notin \{a_{\Gamma_p}, s(a_{\Gamma_p})\}$.

□

Para este caso también se cumple que cada celda i con estado a_i tendrá en j etapas más adelante estado a_{i+j} , excepto las celdas Γ_p que tendrán el estado máximo entre $(kn - \frac{pn}{2} - 3) + j$ y $(\frac{pn}{2} - 3) + j$.

Lema 4.12.

$$F(\mathcal{A}_{k+1}) \subseteq \mathcal{A}_{k+1}$$

Demostración. Nuevamente probaremos que $F_i(a) = a_{i+1}$, pero para $i \neq \Gamma_p$.

- En el caso de los nodos $i = \frac{pn}{2} - 1 + j \forall p = 0 \dots k + 1 \forall j = 0 \dots \frac{n}{2} - 2$ y los nodos $i = kn - 1$ e $i = \frac{k}{2} - 1$, éstos están conectados en el esqueleto sólo con los nodos $i - 1$ e $i + 1$ y como $a_{i+1} \in \{a_i, s(a_i)\}$, su evolución dependerá sólo del nodo $i + 1$. Luego

$$F_i(a) = \begin{cases} a_i & \text{si } a_{i+1} = a_i \\ s(a_i) & \text{si } a_{i+1} = s(a_i) \end{cases} \quad (4.3.2)$$

lo que significa que $F_i(a) = a_{i+1}$ para estos nodos.

4.3. CONSTRUCCIÓN DE CICLOS EN UN RECTÁNGULO

- Sólo falta analizar los nodos $\frac{pn}{2} - 2$, $kn - \frac{pn}{2} - 1$ y Γ_p .

Para los dos primeros casos, i está conectada en el esqueleto con $i - 1$, con $i + 1$ y con Γ_p para algún j . Por lo mismo que antes, la evolución no dependerá del nodo $i - 1$. Luego

$$F_i(a) = \begin{cases} a_i & \text{si } a_{i+1} = a_i \wedge a_{\Gamma_p} \neq s(a_i) \\ s(a_i) & \text{si } a_{i+1} = s(a_i) \vee a_{\Gamma_p} = s(a_i) \end{cases} \quad (4.3.3)$$

pero $a_{\Gamma_p} = \max(a_{\frac{pn}{2}-3}, a_{kn-\frac{pn}{2}-3})$, luego en cualquiera de los dos casos $a_i \in \{a_{\Gamma_p}, s(a_{\Gamma_p})\}$, por lo que $a_{\Gamma_p} \neq s(a_i)$. Esto implica que la ecuación (4.3.3) se simplifica a la ecuación (4.3.2), por lo cual se concluye, al igual que antes, que $F_i(a) = a_{i+1}$ para estos nodos.

- El nodo $i = \Gamma_p$ tiene dos conecciones en su esqueleto, con $\frac{pn}{2} - 2$ y con $kn - \frac{pn}{2} - 2$, luego se tendrá que

$$F(a_{\Gamma_p}) = \begin{cases} a_{\Gamma_p} & \text{si } a_{\frac{pn}{2}-2} = a_{\Gamma_p} \wedge a_{kn-\frac{pn}{2}-2} = a_{\Gamma_p} \\ s(a_{\Gamma_p}) & \text{si } a_{\frac{pn}{2}-2} = s(a_{\Gamma_p}) \vee a_{kn-\frac{pn}{2}-2} = s(a_{\Gamma_p}) \end{cases}$$

lo que significa que $F(a_{\Gamma_p})$ es igual al $\max(a_{\frac{pn}{2}-2}, a_{kn-\frac{pn}{2}-2})$. Luego, como $F(a_i) = a_{i+1}$ y $F_{\Gamma_p}(a) = F_{\xi}(a)$ con $\xi = \arg \max(a_{\frac{pn}{2}-3}, a_{kn-\frac{pn}{2}-3})$, entonces $F(a) \in \mathcal{A}$.

□

Y nuevamente gracias al Lema 4.11 y al lema anterior podemos concluir que el esqueleto no cambiará, es decir, que el esqueleto está estabilizado.

Corolario 4.13.

$$\forall a \in \mathcal{A}_k, \quad Es(\mathcal{C}_k, a) = Es(\mathcal{C}_k, F(a))$$

En definitiva, para todo k tenemos un grilla \mathcal{C}_k y una familia de configuraciones \mathcal{A}_k que contiene un ciclo de largo kn y salto kq , el cual tiene un esqueleto estable.

Ahora, la forma de la grilla \mathcal{C}_k es irregular (no es un rectángulo, que es lo que necesitamos), por lo que veremos ahora la forma de completarla a un rectángulo.

4.3. CONSTRUCCIÓN DE CICLOS EN UN RECTÁNGULO

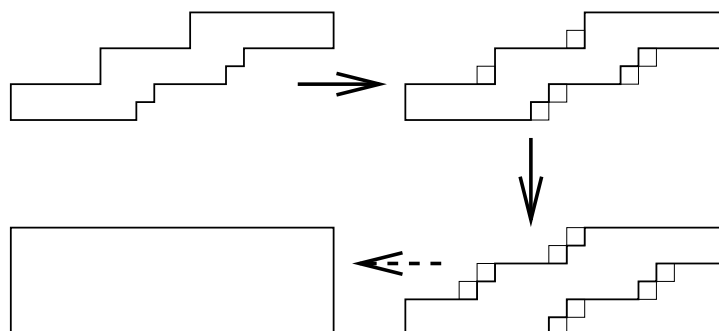


Figura 4.12: Ejemplo de completación a un rectángulo.

4.3.3 Completación a un rectángulo

Deseamos a partir de un ciclo \mathcal{C} y una configuración de estados \mathcal{A} definir un nuevo subgrafo \mathcal{C}' y su configuración \mathcal{A}' de forma que \mathcal{C}' sea un rectángulo.

Para esto, hacemos la siguiente iteración:

1. Buscar una esquina del borde de \mathcal{C} en la cual el nodo que completa esa baldosa no esté en \mathcal{C} .
2. Definir $\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \{c\}$ donde c es el nodo que completa la baldosa anterior.
3. Definir $\bar{\mathcal{A}}$ como \mathcal{A} y al nodo c asociar el estado del nodo opuesto en la baldosa.

Al hacer esto, el salto del ciclo es el mismo que antes, pues se agregó una baldosa con salto 0. Tampoco la evolución cambia, pues todos los nodos están conectados en su esqueleto con nodos que tienen el mismo estado que en la situación anterior.

Esto se puede seguir realizando con todas las esquinas que cumplan la condición redefiniendo $\mathcal{C} = \bar{\mathcal{C}}$ y $\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}}$, completando así un rectángulo de alto $2k$ y ancho $k\frac{n}{2} - 2(k-1)$ en el que el ciclo está sobre el borde.

Con esto hemos construido ciclos de igual eficiencia y de distinto largo que podemos ubicarlos en el plano para así responder afirmativamente a la pregunta que dio origen a esta memoria.

4.3. CONSTRUCCIÓN DE CICLOS EN UN RECTÁNGULO

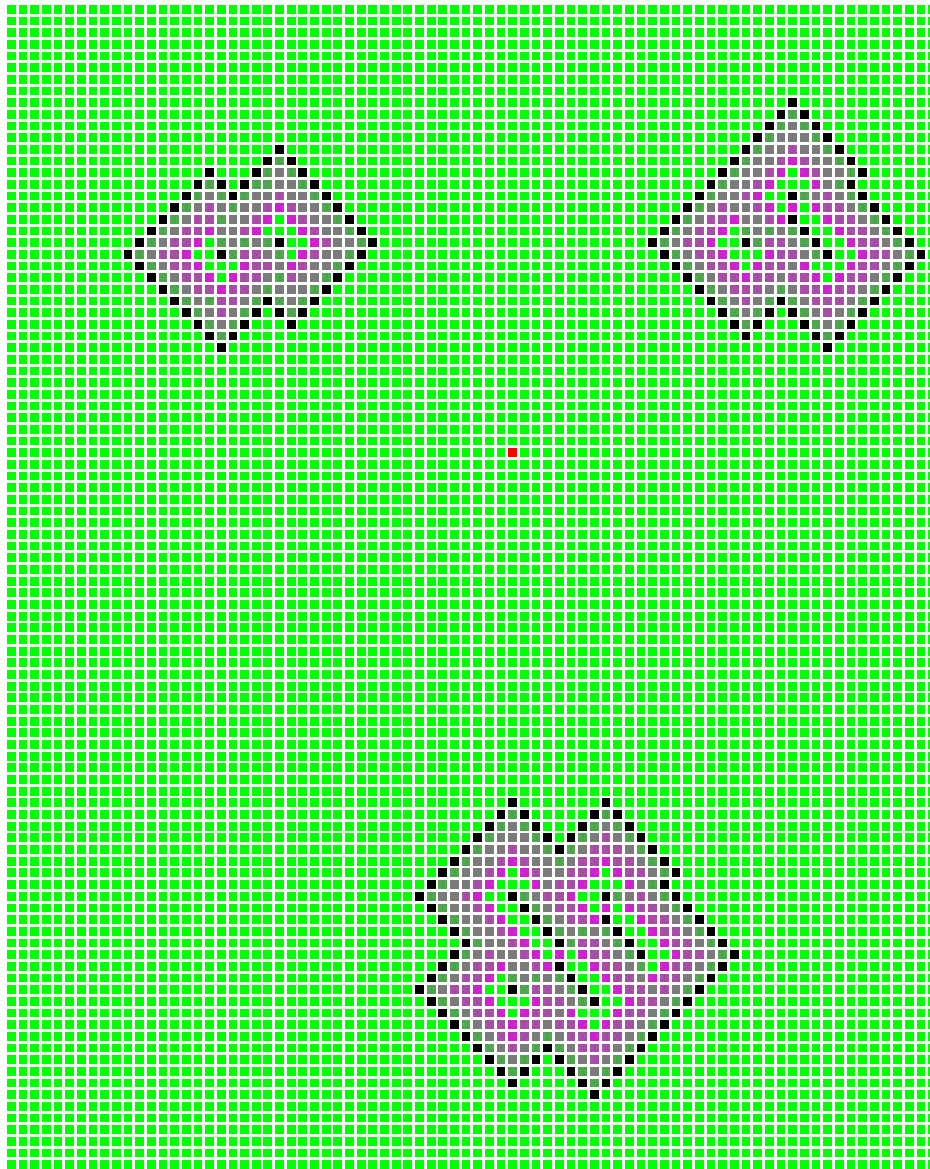


Figura 4.14: Ejemplo de configuración con período $T(x) = e^{\Omega(\sqrt{|V|})}$.

4.3. CONSTRUCCIÓN DE CICLOS EN UN RECTÁNGULO

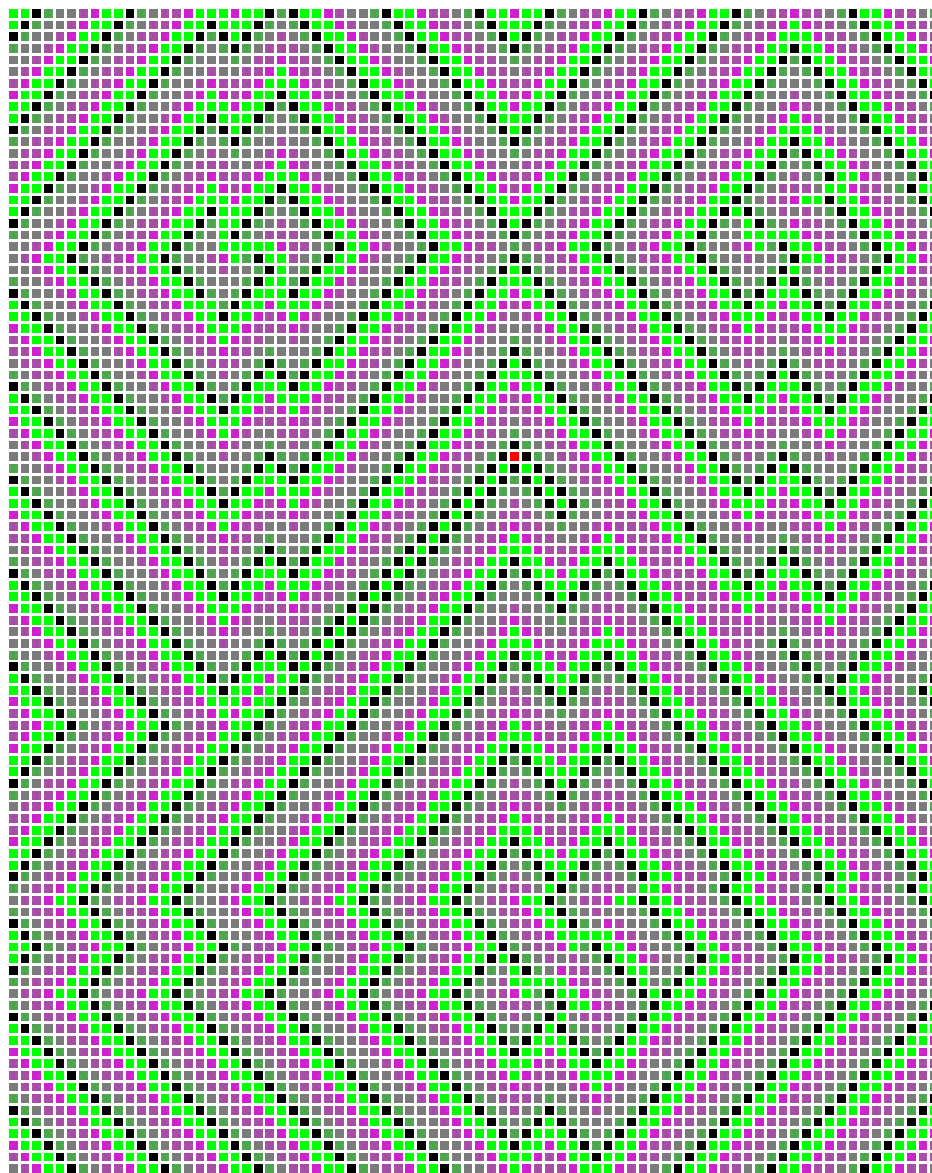


Figura 4.15: Ejemplo de configuración con período $T(x) = e^{\Omega(\sqrt{|V|})}$ iterada.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

En la presente memoria hemos estudiado un aspecto principal de la CAN sobre el plano, demostrando la existencia en el plano de configuraciones que permiten obtener períodos con cotas no polinomiales con respecto al número de nodos que no están en su estado inicial y entregando un algoritmo para construir este tipo de configuraciones.

Importante también es la familia de asignaciones de estados utilizada, pues dado los resultados del Capítulo 3, estas están muy cerca de ser las únicas posibles de utilizar sobre el grafo \mathbb{Z}^2 .

En el desarrollo de las construcciones surgieron nuevos problemas y propiedades, muchas de ellas vistas al simular la red de autómatas en el computador, que aun no tienen una respuesta o una demostración.

La construcción del ciclo en forma rectangular nace de que los nodos al interior del ciclo principal producen nuevos ciclos que son difíciles de evitar, por lo que la construcción posee muy pocos nodos al interior. ¿Es posible realizar esto en otro tipo de figuras?, ¿O con más nodos al interior? La experiencia acumulada al iniciar el estudio nos dice que esto es bastante difícil, pero que es probable dada las formas geométricas que se dan al interactuar varios ciclos distintos.

Por otro lado, dado un conjunto finito de aristas E del plano, ¿es posi-

ble encontrar una configuración de esqueleto estable cuyo complemento del esqueleto sea exactamente E ?

Estas y otras preguntas con respecto a las construcciones realizadas quedan por estudiar, sin embargo hay otras preguntas que tienen un interés mucho más general.

Por ejemplo, en el estudio de la CAN cuando el esqueleto es completo, demostramos la posibilidad (en el caso $q = 3$) de construir un ciclo de cualquier eficiencia $e \in \mathbb{Q} \cap [\frac{3}{4}, 1]$. ¿Es posible obtener eficiencias irracionales?, dado el soporte finito de las configuraciones esto no es posible, pero se podría generar una sucesión de grafos que converjan a una eficiencia en \mathbb{I} .

Y por supuesto la pregunta más importante a estudiar es la posibilidad de extender los resultados al grafo \mathbb{Z}^d para $d \geq 3$, en donde la construcción de ciclos parece ser más compleja dada la imposibilidad de definir en forma simple los conceptos de interior y exterior de un ciclo.

De igual importancia es la extensión de estos resultados a otros grafos regulares donde algunos resultados, por ejemplo el concepto de baldosa y sus propiedades, se pueden extender fácilmente mientras otros, como la creación de ciclos independientes y sus protecciones, parecen ser más complicados.

Por último la programación de un simulador de una red de autómatas en un lenguaje de programación multi-plataforma como lo es Java permite que este software sea una herramienta de apoyo para todo aquel que desee estudiar nuevas propiedades y características de las redes de autómatas cíclicos.

CAPÍTULO A

SOFTWARE

A.1 SIMULACIÓN

Se necesitaba crear una simulación computacional de una red de autómatas cíclicos para así poder analizar los comportamientos de ciclos formados en él. Esto requiere poder graficar una gran área de la red y además observar el esqueleto, para luego poder iterar y ver los cambios que suceden.

Para esto se programó en lenguaje JAVA un software que cumple con los requerimientos anteriores.

A.1.1 Obtención, ejecución e instalación

La fuente escrita en lenguaje JAVA (*CAN.java*) se encuentra disponible en

<http://www.dim.uchile.cl/~emoreno/CAN/>

Esta fuente está probada en JDK 1.1.7 o posteriores.

A.1. SIMULACIÓN

Además, existe una versión anterior hecha como APPLET para así poder utilizarlo a través de Internet. Esta versión no tiene todas las implementaciones y su evolución es lenta, pero de todas formas sirve como simulación. Su ubicación es

<http://www.dim.uchile.cl/~emoreno/CAN/applet>

A.1.2 Uso del software

Al ejecutar el software, se creará una ventana, con un panel de botones y dos gráficos.

El programa simula un autómata de tamaño 100x100 que inicialmente se encuentra con todos los nodos en estado 0. Este autómata es mostrado en la parte derecha de la ventana. Además se cuenta en el lado izquierdo de la ventana con una ampliación de una zona de tamaño 15x15 del autómata, en el cual además se muestra el esqueleto.

Mediante el mouse, uno puede seleccionar la zona del autómata que quiere ampliar, simplemente seleccionando con algún botón la esquina superior izquierda de la zona deseada en el gráfico de la derecha.

Además, mediante el mouse, uno puede cambiar el estado de un nodo del autómata, presionando algún botón del mouse sobre el nodo que se desea cambiar en el acercamiento del lado izquierdo.

El resto de las funciones del software se encuentra en la barra de botones, la cual tiene los siguientes significados:

Borrar: Permite reiniciar el autómata fijando todos los estados en 0.

Actualizar: Redibuja el autómata en la pantalla.

Grabar: Graba *en memoria* el estado actual del autómata, con esto se permite hacer modificaciones y poder recuperar el estado anterior. En caso de reiniciar el programa, esta grabación se pierde.

Cargar: Carga el estado grabado *en memoria* por el botón anterior.

A.1. SIMULACIÓN

LoadAll,SaveAll: Carga o graba *en un archivo* el estado del autómata.

LoadPart,SavePart: Carga o graba *en un archivo* la ampliación de 15x15 del lado izquierdo de la ventana.

Iterar: Realiza una evolución del autómata, actualizando ambos gráficos.

Iter30: Realiza 30 iteraciones del autómata, y actualiza.

Salir: Sale del software.

Estados+1,Estados-1: Aumenta o disminuye el número de estados posibles q . El valor actual de q es desplegado a la izquierda de estos botones.

A.1.3 Estructura del programa fuente

El programa tiene una clase llamada **plano** que controla todas las acciones del autómata y la clase **CAN** que dibuja en pantalla los botones y controla las acciones de ellos y del mouse.

La clase plano

Sus variables son

- Los estados del autómata (estado : matriz 100x100)
- El esqueleto (esqueleto: matriz 99x99)
- El número de estados q utilizado (num_estado : int)
- El autómata grabado en memoria (estado_grabado : matriz 100x100)
- Variables de posición para graficar

Los procedimientos de esta clase son los siguientes:

set_numestado: Fija el número de estados q .

A.1. SIMULACIÓN

set_size: Cambia el tamaño del autómata (no utilizado)

set_origen: Cambia la posición de la región a ampliar.

add_estado: Aumenta el estado de un nodo.

grabar: Copia la matriz de estados en la matriz estado_grabado.

recuperar: Recupera la matriz de estados grabada en memoria.

grabar_file: Graba la matriz de estados en un archivo, utilizando el método *writeInt* de JAVA.

recuperar_file: Carga los estados grabados en un archivo a la matriz de estados.

grabar_parc: Graba una porción de la matriz de estados en un archivo, utilizando el método *writeInt* de JAVA.

recuperar_parc: Carga una porción de la matriz de estados grabada en un archivo.

actual: Indica que se debe redibujar toda la pantalla.

iniciar: Fija la matriz de estados en 0.

hacer_esqueleto: en la celda $[i][j]$ pone un 1 si al nodo (i, j) le incide un arco del esqueleto.

iterar: Realiza una iteración del autómata, copiando el estado anterior en una nueva matriz, y realizando los cambios. Además, actualiza la matriz del esqueleto.

coloreado: Determina los colores con los cuales dibujar cada estado.

flecha: Dibuja una flecha en la posición y dirección que se le indique.

dibujar_estados: Realiza toda la rutina gráfica del software, dibujando los estados y luego determinando el esqueleto, para graficar las flechas que simbolizan la dirección de los arcos.

A.1. SIMULACIÓN

La clase CAN

Ejecuta el siguiente procedimiento:

1. Crea un Frame donde dibujar la red de autómatas.
2. Incluye al Frame los botones.
3. Controla los eventos (presiones de botones, uso del mouse, etc.) para realizar la acción sobre el autómata.

BIBLIOGRAFÍA

- [AHU83] Alfred Aho, John Hopcroft, and Jeffrey Ullman, *Data structures and algorithms*, Addison Wesley, Reading, MA, USA, 1983.
- [AR84] Jean-Paul Allouche and Christine Reder, *Oscillations spatio-temporelles engendrées par un automate cellulaire*, Discrete Appl. Math. **8** (1984), no. 3, 215–254. MR 85m:58107
- [Ber58] Claude Berger, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris, 1958.
- [BG89] Maury Bramson and David Griffeath, *Flux and fixation in cyclic particle systems*, The Annals of Probability **17** (1989), 26–45.
- [CS73] P. Clifford and A. Sudbury, *A model for spatial conflict*, Biometrika **60** (1973), 581–588.
- [Dew89] A. K. Dewdney, *Computer recreations, A cellular universe of debris, droplets, defects and demons*, Scientific American (1989), 88–91.
- [FGG91] Robert Fisch, Janko Gravner, and David Griffeath, *Cyclic cellular automata in two dimensions*, Spatial stochastic processes, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991, pp. 171–185. MR 1 144 096
- [Fis90] Robert Fisch, *Cyclic cellular automata and related processes*, Physica D **45** (1990), 19–25.
- [Fis91] ———, *A summary of results about cyclic cellular automata*, Mathematics of random media (Blacksburg, VA, 1989), Lectures in

BIBLIOGRAFÍA

- Appl. Math., no. 27, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 87–96. MR 1 117 239
- [Fis92] ———, *Clustering in the one-dimensional three-color cyclic cellular automaton*, Ann. Probab. **20** (1992), no. 3, 1528–1548. MR 93j:60155
- [Gar70] M. Gardner, *Mathematical games: The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game 'Life'*, Scientific American **223** (1970), no. 4, 120–123, The original description of Conway's game of LIFE.
- [GGH80] James Greenberg, Curtis Greene, and Stuart Hastings, *A combinatorial problem arising in the study of reaction-diffusion equations*, SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods **1** (1980), no. 1, 34–42. MR 81c:92002
- [GH78] J. M. Greenberg and S. P. Hastings, *Spatial patterns for discrete models of diffusion in excitable media*, SIAM J. Appl. Math. **34** (1978), no. 3, 515–523. MR 58 #4408
- [GHH78] J. M. Greenberg, B. D. Hassard, and S. P. Hastings, *Pattern formation and periodic structures in systems modeled by reaction-diffusion equations*, Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978), no. 6, 1296–1327. MR 80c:92030
- [Har69] Frank Harary, *Graph theory*, Addison Wesley, Reading, MA, USA, 1969.
- [HL75] R. Holley and T. Liggett, *Ergodic theorems for weakly interacting systems and the voter model*, The Annals of Probability **3** (1975), 643–663.
- [MG97] Martín Matamala and Eric Goles, *Dynamic behavior of cyclic automata networks*, Discrete Appl. Math. **77** (1997), no. 2, 161–184. MR 98d:68154
- [Pap94] Christos H. Papadimitriou, *Computational complexity*, Addison Wesley, Reading, MA, USA, 1994.

BIBLIOGRAFÍA

- [Shi79] Ryuzo Shingai, *Maximum period of 2-dimensional uniform neural networks*, Inform. and Control **41** (1979), no. 3, 324–341. MR 80e:94031
- [WR46] N. Wiener and A. Rosenblueth, *The mathematical formulation of the problem of conduction of impulses in a network of connected excitable elements, specifically in cardiac muscle*, Arch. Inst. Cardiol. Mexico **16** (1946), 205–2265.